Euclides

Elementi. Libro primo

Questo e-book è stato realizzato anche grazie al sostegno di:

E-text
Web design, Editoria, Multimedia
(pubblica il tuo libro, o crea il tuo sito con E-text!)
www.e-text.it

QUESTO E-BOOK:

TITOLO: Elementi. Libro primo
AUTORE: Euclides
TRADUTTORE: Vacca, Giovanni
CURATORE: Vacca, Giovanni
NOTE:
CODICE ISBN E-BOOK: n. d.

COPERTINA: n. d.

TRATTO DA: Il primo libro degli elementi / Euclide ; testo greco, versione italiana, introduzione e note a cura di Giovanni Vacca ; con prefazione di Nicola Festa. - Firenze : G. C. Sansoni, 1916 (G. Carnesecchi e Figli). - XVIII, 122 p. ; 18 cm

CODICE ISBN FONTE: n. d.

1a EDIZIONE ELETTRONICA DEL: 15 giugno 2024

INDICE DI AFFIDABILITÀ: 1
0: affidabilità bassa
1: affidabilità standard
2: affidabilità buona
3: affidabilità ottima

SOGGETTO:
MAT012000 MATEMATICA / Geometria / Generale

CDD:
510 MATEMATICA
516 GEOMETRIA

DIGITALIZZAZIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

REVISIONE:
Gabriella Dodero
Ruggero Volpes

IMPAGINAZIONE:
Paolo Alberti, paoloalberti@iol.it

PUBBLICAZIONE:
Catia Righi, catia_righi@tin.it
Claudia Pantanetti, liberabibliotecapgt@gmail.com

Indice generale

Liber Liber....4
Euclides Il primo libro degli Elementi....6
Prefazione....7
Introduzione....12
Avvertenza....22
Elementi Libro I....24
I. Termini....24
Postulati....26
Nozioni comuni....27
Libro primo....29
Στοιχειων Α....93
α´ Ὅροι....93
Αἰτήματα....95
Κοιναὶ ἔννοιαι....96
Glossario....143

EUCLIDES

IL PRIMO LIBRO DEGLI ELEMENTI

VERSIONE ITALIANA, INTRODUZIONE E NOTE, A CURA DI GIOVANNI VACCA, CON PREFAZIONE DI NICOLA FESTA.

ἴσμεν που ὅτι τῷ ὅλῳ καὶ παντὶ
διοίσει ἡμμένος τε γεωμετρίας καὶ μὴ
PLATONE, *Repubblica* VII, 9

PREFAZIONE

Molto spesso avviene che libri moderni di argomento scientifico abbiano, almeno a guisa d'introduzione, pagine relative alla storia delle ricerche compiute fin dall'antichità in quel dato campo di studi, e in tali pagine si parli piú o meno diffusamente della scienza greca. Ma non sembra altrettanto frequente il caso che simili riassunti storici rivelino, non dico vedute originali, ma almeno segni manifesti di una conoscenza diretta delle cose di cui parlano i loro autori. Si direbbe che il rigore scientifico sia, per tacito consenso di chi scrive e di chi legge, richiesto solo nelle pagine successive, mentre nella parte storica sia lecito riassumere o copiare senza soverchio scrupolo da qualsiasi manuale o enciclopedia.

Una conseguenza di tal modo di procedere – dico una conseguenza, e potrei dire: un motivo – è che nella generalità dei dotti e semidotti si parla, sì, di scienza greca, perché non se ne può fare a meno, ma si è piuttosto lontani dal valutare a dovere la grandezza e l'importanza di essa. È, per esempio, abbastanza diffuso uno storto giudizio su quello che costituisce, per cosí dire, il debito della civiltà moderna verso i Greci; perché molti credono in buona fede che solo nella poesia e nell'arte, e un tantino nella filosofia (a che Platone e Aristotele, in fin dei conti, se tutta la filosofia moderna comincia da Kant? e torna irresistibilmente a Kant come una farfalla che svolazza intorno a un lume?), fuori, dico, di quei campi non abbiamo bisogno d'imparare niente dai greci, né questi insegnarono mai niente d'importante al genere umano.[1]

Ed è curioso osservare come questo errore sia stato e sia favorito anche dai cultori stessi degli studi classici, per un esagerato amore ai capolavori letterari e per un ostentato disprezzo degli altri elementi che a buon diritto debbono far parte di una «scienza dell'antichità» veramente degna di questo nome. La cosa comincia a diventare grottesca in questi ultimi tempi, in cui ci tocca sentire qualche rappresentante ufficiale dell'insegnamento classico superiore, trinceratosi opportunamente fra le grancasse dei futuristi, tuonare anche contro la filologia in senso stretto, e predicare che fuori della letteratura non c'è altro. Il che, se fosse preso sul serio – e il pericolo non è certo lontano – porterebbe a dar ragione ai nemici del classicismo, ai quali sembra che tutto il godimento intellettuale dato dalle opere letterarie non compensi la fatica necessaria per poterle studiare direttamente, e che si faccia piú presto a servirsi di traduzioni.

---

1 Tra quelli – pochi invero anche fuori d'Italia, dove sono pochissimi – che hanno levato la voce contro questo pregiudizio, va messo in prima linea, il venerando J. P. Mahaffy, il cui libro *What have the Greeks done for modern civilisation?* (New York-London 1909) merita di trovare anche in Italia molti lettori. Una traduzione sarà pubblicata fra breve dall'editore Sansoni.

Si dovrebbe comprendere che tutto l'amore per i grandi classici – se non è, come amore, addirittura cieco – non esige affatto il disprezzo o l'ignoranza di certe opere modeste che il classicista fanatico non legge e distruggerebbe volentieri per non lasciarle leggere agli altri. Anzi, se amore è, qui piú che altrove, fatto di conoscenza e d'intimità, è chiaro che andare molto addentro nella intelligenza dei classici è il fine prossimo di tutti i nostri studi. Ma tutti sanno che a questo fine si appresserà prima e meglio degli altri chi non avrà trascurato di conoscere quanto piú è possibile lo stato generale della cultura e le forme e gli atteggiamenti particolari del pensiero, in mezzo ai quali vissero gli autori delle grandi opere artistiche e letterarie. Ora, una storia della cultura – ch'è dunque in fondo il presupposto indispensabile anche della storia letteraria e della critica estetica – come si può tentare trascurando, non dico tutte le manifestazioni secondarie – non inutili mai, anche se piccole e minime, – ma tutto il campo della investigazione e produzione scientifica e gli scritti destinati a divulgare la scienza?

⁂

A parte questo contributo importante alla conoscenza complessiva della cultura antica, la scienza ellenica, pur cosi mutila come è giunta a noi, si presenta fornita di pregi intrinseci tali, che merita di essere studiata per se stessa non meno che la letteratura e l'arte. Perfino tra i torbidi rivoli della falsa scienza, come nell'astrologia, nell'alchimia, nella fisiognomonica, scorrono qua e là vene purissime di genialità e di pensiero profondo; sicché il tempo, vecchio burlone, ha presentato – forse presenterà ancora – qualche volta come scoperte scientifiche modernissime, certe osservazioni e teorie, che giacevano da secoli in mezzo a quel materiale coperto dall'oblio e dal disprezzo. Ma nei campi della matematica, della medicina, della geografia, per non dir altro, ci sono opere greche degne di attirare anche oggi l'attenzione dei dotti e delle persone colte, se non per la materia, almeno per il metodo della ricerca e per la forma dell'esposizione. Per questo io mi rallegro col valoroso editore fiorentino che in questi momenti difficili non esita a dare alla luce questo volume, e mi auguro ch'egli non si fermi qui, ma dia all'Italia tutta una serie di volumi adatti come questo ad iniziare alla conoscenza diretta della scienza greca ogni persona mediocremente colta e modestamente volenterosa.

Il mio collega Giovanni Vacca – un uomo al quale, se fosse vissuto ai tempi di Aristotele, sarebbe stato attribuito per comune consenso l'epiteto di *φιλομαθέστατος*, tanto è l'ardore di sapere che lo spinge allo studio delle materie piú disparate e nei campi piú remoti e difficili, – curando con intelligenza ed amore questo volume, ha mostrato in pratica molto bene quali debbano essere le doti proprie delle pubblicazioni di questo genere. Ciò che trattiene molti dalla lettura dei libri antichi è sopratutto la difficoltà della lingua; e a ciò provvede la traduzione fedele e garbata, a cui si rivolgerà di tanto in tanto chi non ha forze sufficienti per intendere subito il testo da sé, e di cui potrà servirsi anche chi non conosce affatto il greco. Ai giovani del ginnasio classico sarà gradito certamente trovarsi, senza troppa fatica, in grado di fare in greco la dimostrazione di un teorema. Può essere un primo passo a quel rinnovamento degli studi classici, che dovrà portare vita nella scuola classica, senza bisogno di ridurre la grammatica greca al metodo Berlitz.

Per gli alunni di altre scuole – anche se l'educazione umanistica sia in essi tanto rudimentale da non permettere loro di gustare la tipica bellezza del ragionamento euclideo – il Vacca ha raccolto nella prefazione e nelle note notizie utili ad ognuno che non voglia o dire spropositi o non sapere aprir bocca in materia di storia della scienza. A me che ho scorso con piacere e con profitto le pagine di questo libro, sia concesso di rallegrarmi col Vacca e sperare che egli sia non solo il primo, ma anche uno dei piú attivi collaboratori della collezione che, secondo i miei voti, si inaugura appunto con questo volume.

Roma, 16 novembre 1915.

NICOLA FESTA.

INTRODUZIONE

1. Poco assai si conosce della vita di EUCLIDE. PROCLO da Bisanzio (il quale visse dal 412 al 485 d. Cr.) riferisce che «Euclide compilò i suoi *Elementi* raccogliendo molti teoremi di EUDOSSO, perfezionandone molti di TEETETO, e completando con dimostrazioni esatte ciò che i suoi predecessori avevano lasciato di incompleto. Euclide visse al tempo del primo Tolomeo (il quale regnò dal 306 al 283 av. Cr.). Poiché ARCHIMEDE, il quale venne subito dopo, parla di Euclide; ed inoltre si dice che avendogli una volta Tolomeo chiesto se vi fosse in geometria una via piú breve degli *Elementi*, rispose che in geometria non vi sono vie regie».

Euclide sembra avesse studiato in Atene tra i discepoli di Platone. Fondò poi ad Alessandria una scuola ed ebbe tra i suoi discepoli APOLLONIO da Perga.

Si racconta infine che un tale, avendo cominciato a studiare geometria con Euclide, dopo aver studiato il primo teorema gli chiese: «Ma che guadagnerò imparando queste cose?» e che Euclide, chiamato il suo schiavo, rispondesse: «Dagli tre denari, poiché egli vuol trar guadagno da ciò che apprende».

2. Allorquando Euclide scriveva, la geometria greca aveva già tre secoli di vita.

Era nata, come il nome stesso indica (*agrimensura*, misura dei campi), e come gli scrittori greci, concordi, riferiscono, per bisogni pratici, in Egitto.

D'altra parte il bisogno di rendersi conto e di descrivere i fenomeni celesti aveva già condotto i Babilonesi e gli Egiziani alla scoperta delle prime verità aritmetiche e geometriche.

TALETE da Mileto, nato intorno al 625 av. Cr., Fenicio di origine (ERODOTO I, 170), è il primo scrittore greco di matematica. Sembra che egli abbia predetto l'eclisse di sole del 28 maggio 585 av. Cr., utilizzando alcune nozioni assai semplici sulla periodicità delle eclissi, scoperte dagli astronomi Babilonesi.[2] PLUTARCO (Solon. vit.

---

2 G. SCHIAPARELLI, nei suoi importanti scritti: *I primordi e i progressi dell'astronomia presso i Babilonesi.* (Scientia, Rivista di scienza, Bologna 1908, vol. III pagine 213-259, vol. IV p. 24-54), ha dimostrato che le conoscenze astronomiche dei Babilonesi erano assai imperfette. I loro calcoli erano quasi soltanto interpolazioni aritmetiche, ed essi non capirono mai come la geometria fosse necessaria per risolvere con precisione i problemi astronomici.

Ai tempi di Talete essi ignoravano ancora il periodo di 223 lunazioni detto *saros*, che regola approssimativamente il ritorno delle eclissi, ma probabilmente, avevano soltanto osservato che le eclissi lunari si seguono regolarmente a intervalli di quasi sempre 17 lunazioni senza eclissi, seguite da una serie di cinque o sei eclissi, separate da sei lunazioni ciascuna. Le cinque o sei eclissi sono una o due parziali, due totali, una o due parziali.

Ma soltanto assai piú tardi gli astronomi greci riuscirono a prevedere col calcolo le eclissi lunari e solari, liberando gli uomini dai terrori e dalle inquietudini che questi fenomeni producevano.

c. 2; de plac. phil. I, c. 3) dice che Talete era un negoziante, e che viaggiò a lungo in Egitto, dove egli apprese probabilmente le prime nozioni geometriche.[3] I suoi scritti sono perduti. PROCLO gli attribuisce le prop. 15 e 22 del primo libro di Euclide.

PITAGORA da Samo (nato intorno al 570, morto a Metaponto intorno al 470 av. Cr.) dopo aver a lungo viaggiato in Egitto e in Babilonia, fondò a Crotone una scuola. Nessuno scritto ci resta di lui. Gli si attribuisce da Plutarco e da Proclo la prop. 47 del primo libro di Euclide.

Ed ai Pitagorici si attribuiscono le prop. 32 e 44 dello stesso libro.

Durante i due secoli seguenti, nella Grecia stessa, nelle isole e nelle coste dell'Asia minore, in Egitto, nelle colonie greche dell'Italia, la geometria, l'aritmetica, l'astronomia si svilupparono e crebbero tanto da superare di gran lunga quanto ogni altro popolo dell'antichità aveva scoperto in queste scienze. Basti ricordare soltanto i nomi di ANASSAGORA, di ENOPIDE da Chio, al quale si attribuiscono le prop. 12 e 13 del I libro di Euclide, di ZENONE da Elea, di IPPOCRATE da Chio, di TEODORO da Cirene, di TEETETO da Eraclea, di ARCHITA da Taranto, amico di PLATONE; di EUDOSSO da Cnido, scolaro di Archita e di Platone; di EUDEMO da Rodi, scolaro di ARISTOTELE, di PITEA da Marsiglia.

---

3 Cfr. IAMBLICHI, *De communi mathematica scientia* XXI, ed. Festa, Lipsia. Teubner. 1891 p. 66.

È difficile poter spiegare come mai la matematica greca si sia tanto rapidamente sviluppata, in modo da superare di gran lunga quella di tutti gli altri popoli. Anche per la matematica accade in Grecia ciò che accade per le arti belle, per la poesia, per la storia, per la filosofia: i Greci sono primi tra i loro contemporanei e poi i nostri maestri.

È da notare però che il considerevole sviluppo della matematica in Grecia nel VI e nel V secolo, procede di pari passo, e forse è in parte la conseguenza, dei progressi della tecnica.[4]

Erodoto (III, 60) ricorda come una costruzione veramente maravigliosa, l'acquedotto di Samo, il quale comprendeva una galleria di un chilometro e mezzo (sette stadi di lunghezza), costruito dall'architetto Megarese Eupalino nel VI sec. av. Cr. La costruzione di questa galleria, cominciata, come sembra, ai due imbocchi contemporaneamente, esigeva l'uso di molte e svariate cognizioni matematiche. La scienza delle costruzioni navali (tanta parte ebbe il mare nella vita del popolo greco), l'arte di navigare e la conseguente necessità di conoscere la configurazione dei mari, spiegano come già Anassimandro da Mileto avesse costruito per i naviganti una carta celeste ed una terrestre.

L'arsenale costruito al Pireo esisteva già da due secoli

4 Da un'interessante conferenza di H. Diels, *Wissenschaft und Technik bei den Hellenen*, Neue Jahrbücher für das classische Altertum, Berlin, Teubner 1914, I, p. 1-17, tolgo alcune delle citazioni seguenti.

ai tempi d'Archimede. Cosicché le sue opere, sulle quali ancor oggi sono fondate le teorie dei moderni costruttori navali, sono forse il coronamento di una lunga serie di tentativi e di esperimenti.

Il ponte di navi sul Bosforo costruito per ordine di Dario dall'architetto Mandrocle da Samo (Erodoto IV, 87-88), o il ponte sull'Ellesponto costruito per ordine di Serse (Erodoto, VII, 34) furono opere di cui ancor oggi sarebbero fieri i capi dei nostri moderni eserciti.

L'arte militare[5] pure contribuí al progresso della meccanica. Le macchine belliche, balliste, catapulte, etc. furono già adoperate dai Greci di Sicilia sotto Dionisio il vecchio (400 av. Cr.), ed è probabilmente anche a causa dei progressi della tecnica militare greca che la Sicilia resisté per molti secoli contro i Cartaginesi.

Cosí il primo trattato di meccanica (oggi perduto) di Archita da Taranto (429-348 av. Cr.) avrebbe contenuto la prima descrizione delle macchine semplici, e le loro proprietà, forse in seguito all'uso osservato nell'arte militare. Come è noto che nel continuo uso e nella complicazione dell'artiglieria del sec. XV si deve ricercare la origine delle speculazioni sul moto dei corpi di Tartaglia e di Galileo.

3. Chi legge la piú bella delle commedie antiche, *gli uccelli* di Aristofane, rappresentata per la prima volta

5 Platone nella *Repubblica* (VII, 9) rileva la evidente utilità della geometria nell'arte della guerra, nel tracciare gli accampamenti, nell'assedio delle fortezze, nella concentrazione e lo spiegamento dell'esercito, etc.

nel 414 av. Cr., ed osserva come sia posto in ridicolo il geometra METONE (v. 992-1020) facendogli fare un discorso privo di senso, ma composto di frasi tecniche della matematica (egli si offre di misurare il cielo con i suoi strumenti, di far diventare un circolo quadrato,...), deve concludere che già fin d'allora la geometria doveva aver destato l'attenzione non solo di pochi ricercatori ma del popolo, poiché altrimenti gli spettatori non avrebbero potuto sentire la comicità della scena.

Ai tempi di PLATONE (il quale visse dal 429 al 348 av. Cr.) la geometria aveva già acquistato la fisionomia che essa ha ai nostri giorni. «I geometri, egli dice nella *Repubblica* (VI, 20) suppongono che esistano le *figure*, *tre specie di angoli*, e fanno altre supposizioni di questo genere, secondo le dimostrazioni a cui mirano; e delle ipotesi fatte non danno ragione né a se stessi, né agli altri, considerandole completamente evidenti; e partendo da queste, ordinatamente dimostrano tutto il resto, per giungere fino a quello che avevano in animo di dimostrare. Essi si servono perciò di figure visibili, e ad esse applicano i loro ragionamenti, sebbene non sia ad esse che essi pensano, ma a quelle di cui queste sono l'immagine, facendo essi i loro ragionamenti sul quadrato ed un suo diametro, ma non su quello che essi disegnano; e cosí tutte le altre figure che formano o che disegnano, ed anche le loro ombre e le loro immagini nell'acqua, tutte le adoperano come immagini, cercando di rappresentar quelle che non sono visibili che dalla mente...»

4. Si è perduta una storia delle matematiche scritte da EUDEMO da Rodi, e dobbiamo dolercene, poiché da essa specialmente attinsero gli scrittori greci della decadenza le magre notizie che ci son rimaste sulla storia dei primordi della geometria greca.

Sulla storia della geometria greca prima di Euclide sono da consultarsi:

C. A. BRETSCHNEIDER, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Leipzig, Teubner, 1870.

M. CANTOR, *Geschichte der Mathematik*, Leipzig, Teubner, III edizione, vol. I, 1907.

P. TANNERY, *Mémoires scientifiques*, vol. I e II *Sciences exactes dans l'antiquité*, Paris, Gauthier Villars 1912.

G. LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, II ediz. Milano, Hoepli, 1914.

Per uno sguardo complessivo allo sviluppo delle scienze in Grecia si consulti:

A. COSATTINI, *Letture ed appunti sulla storia della civiltà greca*, Roma, Albrighi e Segati, 1910, vol. II, pp. 101-195.

5. Gli elementi di Euclide sono stati adoperati dagli antichi, e quasi senza interruzione fino ai giorni nostri. Nessun altro libro è stato forse mai studiato con tanta continuità, ed accolto con tanto interesse. Allorché nel 1608, l'italiano Matteo Ricci a Pechino tradusse in cinese i primi sei libri di Euclide, essi destarono maggior ammirazione di ogni altra cognizione europea.

La redazione che noi possediamo è in gran parte dovuta a Teone Alessandrino (il quale visse nel IV secolo d. Cr.). Alcuni frammenti di papiri di *Ercolano*, di *Oxyrhyncus* e del *Fayum* permisero al filologo danese Heiberg[6] di ristabilire, in parte, il testo di Euclide quale lo conosceva Erone Alessandrino, tre secoli dopo Euclide, cioè al principio dell'era volgare.

Noi possediamo oggi, grazie all'acume critico, e all'assiduo lavoro di molti anni, di J. L. Heiberg, una edizione ottima del testo greco, ed una versione latina a fronte.

Innumerevoli sono le edizioni e le versioni di Euclide.[7] Accennerò soltanto ad alcune.

Celebre in tutto il medio evo fu la versione latina di Giovanni Campano, da Novara, il quale visse nel secolo XIII, e fu matematico profondo ed acuto.[8]

Ebbe pure grande celebrità, ed è veramente notevole dal punto di vista matematico, se non da quello filologi-

---

6 J. L. Heiberg, *Euclidis, Opera Omnia*, Leipzig, Teubner, 1883-1888 in sette volumi.

Sono inoltre a consultarsi:

J. L. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, 1882.

J. L. Heiberg, *Paralipomena zu Euklid*, Hermes, XXXVIII, 1903.

J. L. Heiberg, *Mathemat. zu Aristoteles*, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wissenschaften. XVIII Heft, 1904 pp. 1-49.

7 Pietro Riccardi, *Saggio di una Bibliografia Euclidea*, Bologna, 1887, 1888, 1890, 1893.

8 Cfr. Angelo Genocchi, *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano*, *note analitiche*, Roma, 1855, p. 93.

co, la versione italiana di Nicolò Tartaglia, pubblicata da lui nel 1543 e poi piú volte ristampata.

La piú soddisfacente versione latina, fino ai tempi moderni, fu quella di Federico Commandino da Urbino (1509-1575), pubblicata a Pesaro nel 1572.

È infine da ricordare che, dopo l'edizione sopracitata di Heiberg, una nuova versione inglese in tre grandi volumi di T. L. Heath, stampata a Cambridge (University Press) nel 1908, ricca di numerosi commenti e di elaborate introduzioni, offre agli studiosi che conoscono la lingua inglese, una ricca miniera di informazioni. Essa mi è stata utile per la compilazione di alcune delle note che seguono.

6. In questa edizione del primo libro di Euclide, col testo greco riprodotto dall'edizione di J. L. Heiberg, a fronte di una nuova versione italiana,[9] mi son proposto anzitutto lo scopo di persuadere gli studenti che studiano greco, che Euclide non è difficile, ed a coloro che hanno paura del greco, che con gli sforzi di poche settimane si può provare il piacere di leggere Euclide nel testo originale.

Poiché si tratta di apprendere un centinaio di parole, una parte delle quali sono ancor vive nella lingua odierna, e poche forme grammaticali.

9 L'edizione di Enrico Betti e Francesco Brioschi, *Gli Elem. di Euclide*, Firenze, Le Monnier, 1867, è anteriore all'edizione definitiva del testo greco di J. L. Heiberg (1883). I due editori avevano preso per base l'edizione di Viviani, scolaro di Galileo (1690) e quella di R. Simson (1756).

7. Il primo libro di Euclide insegna le costruzioni piú semplici, di un triangolo equilatero, di un quadrato (46). Insegna a bisecare un angolo (9), una retta (10), a condurre rette perpendicolari (11)-(14) e parallele (31) a rette date. Contiene inoltre una teoria degli angoli, dei triangoli, dei parallelogrammi ed i primi elementi della teoria dell'eguaglianza delle figure piane. Esso offre quindi in poche pagine, in una esposizione armonica, e ben concatenata una ricca messe di nozioni geometriche, forse piú che qualunque altro libro di geometria, antico o moderno.

Roma, Ottobre 1915.

G. VACCA

AVVERTENZA

Nella versione mi son mantenuto fedele al testo. Noterò che le frasi di Euclide: «A, B eguali a C», ovvero «A, B eguali a C, D» nella lingua algebrica moderna si scrivono: A+B=C, A+B=C+D. Invece la frase «A, B sono eguali a C, D ciascuno a ciascuno», significa: A=C, B=D.

Il nome astratto *somma* non si trova in Euclide.

Questo modo di dire di Euclide ha forse, indirettamente, dato origine al nostro simbolo + il quale, secondo le piú probabili ipotesi, è soltanto una abbreviazione della particella *et.*

Nella nota alla proposizione (35) si troveranno le ragioni per cui credo che alla classica parola *eguale* convenga conservare il suo senso primitivo, anziché introdurre la parola *equivalente* proposta da *Legendre*.

Nelle note alle proposizioni (18) e (19) ho fatto uso di due delle notazioni del calcolo logico, e precisamente del segno — che si legge «*non*», e si pone innanzi ad una proposizione per negarla, e del segno ɔ che si legge «*consegue, si deduce, sono,...*» e si pone tra due proposizioni per dire che la seconda si deduce dalla prima, ovvero tra due classi, per dire che gli individui della prima classe *sono* individui anche della seconda classe.

Cosí ad esempio:

$$(\text{Romani}) \supset (\text{Italiani}) \,.\, (\text{Italiani}) \supset (\text{Europei}) \,.\!\supset\!.\, - (\text{Europei}) \supset - (\text{Romani})$$

I punti servono per separare le varie parti della proposizione.

Per maggiori notizie si consulti G. PEANO, *Aritmetica generale ed Algebra Elem.* Torino, Paravia, 1902.

ELEMENTI
LIBRO I

I.
Termini[10]

1. Punto è ciò che non ha parti.

2. Linea una lunghezza senza larghezza.

3. Estremi di una linea son punti.

4. Linea retta è quella che è posta in pari rispetto ai suoi punti.

5. Superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.

6. Estremi di una superficie son linee.

7. superficie piana è quella posta in pari rispetto alle

---

10 Traduco con *termini*, il greco ὅροι piuttosto che con *definizioni*, come si fa comunemente, perché queste prime pagine introduttorie, invece che *definizioni matematiche*, sono piuttosto chiarimenti o spiegazioni analoghe a quelle che si danno oggi nei dizionari. Queste prime pagine contenenti queste prime spiegazioni, i *postulati* e le *nozioni comuni*, sono state, con tutta probabilità, assai alterate e deformate durante i molti secoli nei quali questo libro fu adoperato nelle scuole. È lecito supporre che le pagine introduttorie originarie fossero tanto eleganti e sobrie quanto son quelle che si trovano premesse agli scritti di Archimede e di Apollonio.

sue rette.

8. Angolo piano è l'inclinazione di due linee in un piano che si toccano, ma non sono per diritto.

9. Quando le linee comprendenti un angolo son rette, l'angolo si chiama rettilineo.

10. Se una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è retto, e la retta posta si chiama perpendicolare a quella su cui è stata posta.

11. Angolo ottuso è quello maggiore di un retto.

12. Acuto è quello minore di un retto.

13. Termine è l'estremo di qualche cosa.

14. Figura è ciò che è compreso da uno o piú termini.

15. Circolo è una figura piana, compresa da una sola linea, tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto entro la figura, sono eguali tra loro.

16. Centro del circolo si chiama quel punto.

17. Diametro del circolo è una retta condotta per il centro, e terminata ad ognuna delle parti alla circonferenza del circolo, la quale divide anche il circolo per metà.

18. Semicircolo è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata.

Il centro del semicircolo è lo stesso del centro del circolo.

19. Figure rettilinee son quelle comprese da rette, trilatere da tre, quadrilatere da quattro, multilatere quelle comprese da piú di quattro.

20. Tra le figure trilatere è triangolo equilatero quello

che ha i tre lati eguali; ISOSCELE quello che ha due soli lati eguali; SCALENO quello che ha i tre lati diseguali.

21. Inoltre tra le figure trilatere, è TRIANGOLO RETTANGOLO quello che ha un angolo retto, OTTUSANGOLO quello che ha un angolo ottuso, ACUTANGOLO quello che ha i tre angoli acuti.[11]

22. Tra le figure quadrilatere è QUADRATO quella che è equilatera e rettangola; OBLUNGO quella che è rettangola ma non equilatera; ROMBO quella che è equilatera ma non rettangola; ROMBOIDE quella che ha i lati e gli angoli opposti eguali tra loro, ma non è né equilatera, né rettangola; si chiamino TRAPEZII[12] tutti gli altri quadrilateri.

23. PARALLELE sono rette, le quali sono nello stesso piano, e prolungate all'infinito da ognuna delle due parti, da nessuna delle due parti si incontrano tra loro.[13]

Postulati.

1. Si ammetta di poter tirare da ogni punto ad ogni [altro] punto, una linea retta;

---

11 Si notino le inaspettate definizioni di triangolo *scaleno*, e di triangolo *acutangolo*, le quali obbligano subito a riflettere, chi per la prima volta sente parlare di geometria.

12 L'uso di chiamar *trapezii* i quadrilateri aventi due lati paralleli è posteriore ad Euclide.

13 Si noti che dire che due rette nello stesso piano incontrate da un'altra retta, si incontrano tra loro, val quanto dire che le tre rette formano un triangolo; e che invece il dire che due rette nello stesso piano incontrate da una terza non s'incontrano tra loro, val quanto dire che esse sono parallele, ovvero val quanto dire che le tre rette non formano un triangolo.

2. e di poter prolungare continuamente per diritto una linea retta terminata;

3. e con ogni centro e con ogni distanza, descrivere un circolo;

4. e che tutti gli angoli retti sono eguali tra loro;

5. e che se una retta incontrando due rette, fa gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito, si incontrano da quella parte nella quale gli angoli son minori di due retti.[14]

Nozioni comuni.[15]

1. Le cose eguali ad una stessa, sono eguali tra loro.

2. E se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i tutti sono eguali.

3. E se da cose eguali si tolgono cose eguali, i resti sono eguali.

4. E le cose sovrapponentisi l'una sull'altra, sono eguali tra loro.[16]

---

14 Questo postulato è adoperato per la prima volta nella proposizione (29).

15 La parola *assiomi* non è adoperata da Euclide. Aristotile li aveva chiamati *κοιναὶ δόξαι*, *opinioni comuni*, suggerendo cosí forse la frase Euclidea.

16 Euclide adopera nella (4) anche la proposizione inversa che cioè *cose eguali tra loro si possono sovrapporre l'una sull'altra*. La distinzione tra *eguaglianza* e *sovrapponibilità* è assai sottile.

Euclide però non fa una teoria generale della *sovrapposizione.* Una teoria completa della *congruenza* (ovvero sovrapponibilità delle figure) è stata costruita da PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, ed esposta con molte semplificazioni

5. E il tutto è maggior della parte.

---

da G. Peano, *Sui fondamenti della geometria*, Riv. di Mat., 1894, t. 4 p. 75 e segg.

A me sembra però preferibile, quando si voglia fare questa distinzione, conservare alla parola *eguali* il senso che essa ha nella logica, ricorrendo invece che alla creazione di una nuova *relazione* di *congruenza*, ad una frase un po' piú complessa come *eguali in forma*, *di egual figura*, etc.

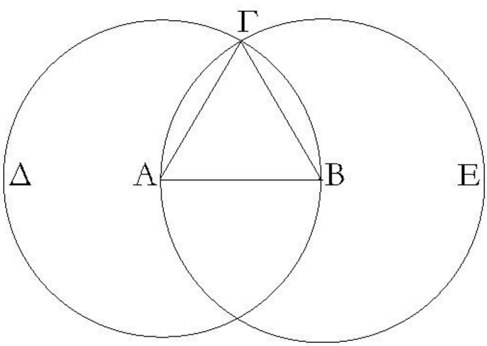
Nelle citazioni, i *termini* si indicheranno cosí: (T 10); i *postulati*, cosí: (P 3); le *nozioni comuni* cosí (C 2); e le *proposizioni* col semplice numero (17).

LIBRO PRIMO

1. — *Sopra una retta data terminata, costruire un triangolo equilatero.*[17]

Sia *AB* la retta data terminata.

Si deve sulla retta *AB* costruire un triangolo equilatero.



Con centro *A* e distanza *AB* si descriva (P3) il circolo *ΒΓΔ*, e di nuovo con centro *B* e distanza *BA* si descriva (P3) il circolo *ΑΓΕ*, e dal punto *Γ* in cui i circoli si tagliano tra loro, si conducano (P1) ai punti *A*, *B* le rette *ΓΑ, ΓΒ*.

17 Si è obiettato a questa dimostrazione e a quella della successiva (22), che in esse Euclide ammette come evidente, che *se un circolo ha il centro su di un altro circolo, ed un punto interno ad esso, lo taglia*. Si è tentato di dimostrare recentemente questa proposizione per mezzo di altri postulati, assai piú complicati. Sembra però piú semplice l'ammettere tacitamente questa proposizione, come parve evidente ad Euclide.

E poiché il punto *A* è centro del circolo *ΓΔB*, la *AΓ* è eguale (T15) alla *AB*. E di nuovo, poiché il punto *B* è centro del circolo *ΓAE*, la *BΓ* è eguale alla *BA* (T15). Ma si è già dimostrato che *ΓA* è eguale alla *AB*. Dunque ognuna delle *ΓA, ΓB* è eguale alla *AB*. Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (C1), dunque la *ΓA* è eguale alla *ΓB*. Dunque le tre *ΓA*, *AB*, *ΓB* sono eguali tra loro.

Dunque il triangolo *ABΓ* è equilatero ed è costruito sulla retta data terminata *AB*, come dovevasi fare.

2. — *Ad un dato punto apporre una retta eguale ad una data retta.*[18]

Sia *A* il punto dato, e sia *BΓ* la retta data. Si deve al punto *A* apporre una retta eguale alla retta data *BΓ*.

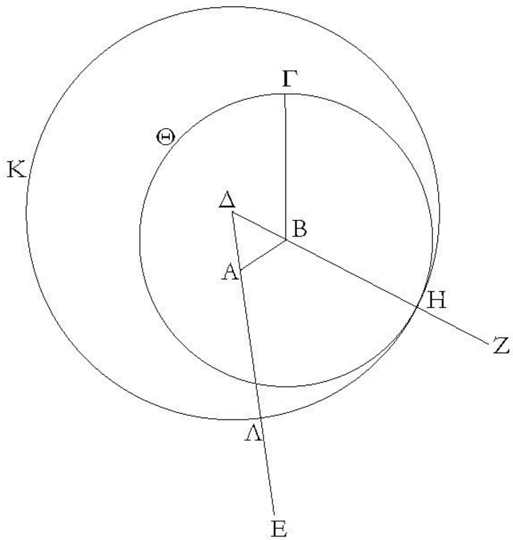
Si conduca infatti dal punto *A* al punto *B* la retta *AB* (P1), e si costruisca su di essa il triangolo equilatero

---

18 Questa proposizione ha molti casi, già analizzati da Proclo. A seconda della disposizione delle figure occorre cambiare alcune parole nella dimostrazione. Si può però sempre ridursi al caso esposto da Euclide. È infine da osservarsi che in altre proposizioni (per es. nella 7) Euclide sviluppa soltanto il caso piú difficile.

L'interesse di questa proposizione è duplice. Essa è anzitutto una elegante applicazione della proposizione precedente e delle nozioni comuni. In secondo luogo essa rende inutile il *trasporto* di una retta nel piano, potendosi supporre con A. De Morgan, che il *compasso* adoperato da Euclide, sia cosí fatto che chiuda le punte, appena cessi di toccar la carta, e che la riga sia cosí fatta che su di essa non si possano far segni.

ΔAB (1), e si prolunghino per diritto (P2) alle *ΔA*, *ΔB* le rette *AE*, *BZ*, e con centro *B* e distanza *BΓ* si descriva il circolo *ΓHΘ* (P3), ed ancora con centro *Δ* e distanza *ΔH* si descriva (P3) il circolo *HKΛ*.



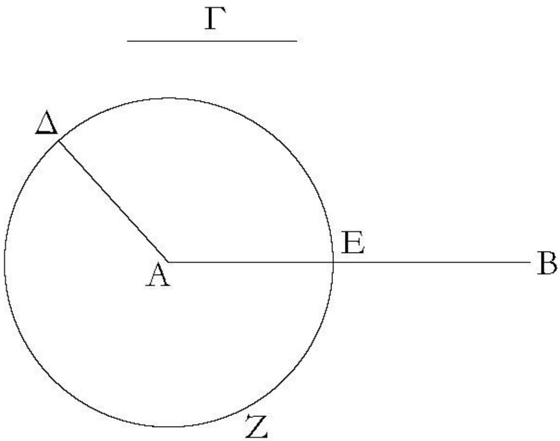
Poiché il punto *B* è centro del circolo *ΓBΘ*, la *BΓ* è eguale alla *BH*. Ed ancora poiché il punto *Δ* è centro del circolo *HKΓ,* la *ΔΛ* è eguale alla *ΔH*, delle quali la parte *ΔA* è eguale alla *ΔB*. Dunque il resto *AΛ* è eguale al resto *BH* (C3). Ma si è dimostrato che la *BΓ* è eguale alla *BH*. Dunque ognuna delle due *AΛ*, *BΓ* è eguale alla *BH*. Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (C1), e perciò la *AΛ* è eguale alla *BΓ*.

Dunque al punto dato *A* si è apposta la *AΛ*, eguale alla retta data *BΓ*, come dovevasi fare.

3. — *Date due rette diseguali, dalla maggiore ta-*

gliare una retta eguale alla minore.[19]

Siano AB, Γ le due rette date diseguali delle quali AB sia la maggiore.



Si deve allora dalla maggiore AB tagliare una retta eguale alla Γ.

Si apponga al punto A, la $A\Delta$ eguale alla retta Γ (2), e con centro A e distanza $A\Delta$ si descriva il circolo ΔEZ (P3).

E poiché il punto A è centro del circolo ΔEZ è AE eguale alla $A\Delta$ (T15); ma anche la Γ è eguale alla $A\Delta$. Dunque ognuna delle AE, Γ è eguale alla $A\Delta$. Dunque (C1) anche la Γ è eguale alla AE.

Dunque, *date due rette diseguali dalla maggiore si è tagliata una retta eguale alla minore*, come dovevasi fare.

19 Lo scopo di questa proposizione, come quello della precedente, è di evitare il *trasporto* di una retta nel piano (poiché per mezzo di questo trasporto i problemi (2) e (3) si risolvono immediatamente), e di limitarsi alle operazioni ammesse dai primi tre *postulati*.

4. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed un angolo eguale ad un angolo, quello cioè compreso dalle rette eguali, avranno anche la base eguale alla base, e il triangolo sarà eguale al triangolo, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali.*[20]

---

20 Si noti che nell'enunciato è detto «*angolo... compreso dalle rette eguali*», e non «compreso *dai lati eguali*», per conservare la frase adoperata per definire un angolo (T 9).

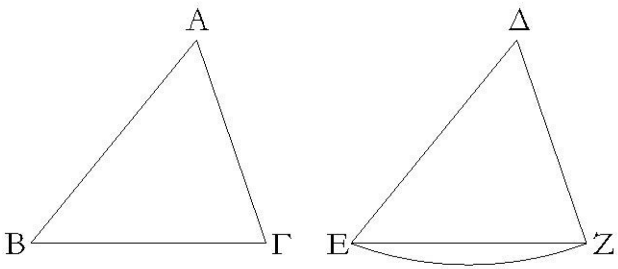
È stato obiettato a questa proposizione che essa implica postulati non formulati, e che è quindi piú semplice assumerla tutta intera come un postulato (per es. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, p. 9), ma l'osservazione è antica (IACOBI PELETARII, In *Euclidis Elementa geometrica demonstrationum libri sex*, Lugduni 1557, p. 15: «.... dicamus, hoc Theorema per se clarum esse, neque probatione egere, sed Definitionis cuiusdam loco habendum esse»).

Si osservi però che per mezzo di questa proposizione Euclide, ricorrendo piú volte alla nozione comune (C 4), dimostra che la *sovrapposizione* di due triangoli eguali si può fare sovrapponendo soltanto un lato ed un angolo di esso. La dimostrazione di Euclide, accenna assai in scorcio, ad una possibile teoria della *sovrapposizione*.

Questo metodo di dimostrare l'eguaglianza di due figure per sovrapposizione, sembra piú antico di Euclide. Infatti Proclo riferisce (HEATH p. 253) che TALETE collo stesso metodo avrebbe dimostrato che ogni diametro taglia il circolo in due parti eguali.

Si noti ancora che la (4) ha una immediata applicazione in agrimensura e in topografia. Se si ha una linea poligonale piana, e di essa si conoscono tutti i lati, e gli angoli che ogni lato fa con quello che lo segue, la linea poligonale è determinata, cioè *due li-*

Siano i due triangoli, aventi due lati AB, $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE, ΔZ ciascuno a ciascuno, e l'angolo $BA\Gamma$ eguale all'angolo $E\Delta Z$.



Dico che anche la base $B\Gamma$ è eguale alla base EZ, e che il triangolo $AB\Gamma$ sarà eguale al triangolo ΔEZ, e che i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali, $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ, e $A\Gamma B$ [eguale] a ΔZE. Infatti sovrapposto il triangolo $AB\Gamma$ al triangolo ΔEZ e posto il punto A sul punto Δ e il lato AB sul lato ΔE, anche il punto B si sovrapporrà al punto E, per essere AB eguale alla ΔE (C4 nota). E sovrapposta la AB alla ΔE, anche la $A\Gamma$ si sovrapporrà alla ΔZ per esser l'angolo $BA\Gamma$ eguale a $E\Delta Z$. Perciò anche il punto Γ si sovrapporrà al punto Z per esser di nuovo eguale $A\Gamma$ alla ΔZ (C4 nota). Ma anche B è sovrapposto ad E. Perciò anche la base $B\Gamma$ si sovrapporrà alla base EZ. Poiché se B è posto su E e Γ su Z, se la base $B\Gamma$ non è sovrapposta alla base EZ, due rette comprenderebbero

---

nee poligonali aventi i lati e gli angoli anzidetti ordinatamente eguali, sono eguali.

La dimostrazione si conduce come quella della (4).

Se si congiunge ogni vertice della poligonale, con quello che lo precede di due posti, si ha una *catena rigida di triangoli.*

uno spazio, ciò che è impossibile. Sarà quindi anche la base *ΒΓ* sovrapposta alla base *EZ*, e sarà ad essa eguale. Dunque anche tutto il triangolo *ΑΒΓ* sarà sovrapposto al triangolo *ΔEZ* e sarà ad esso eguale (C4), ed i restanti angoli saranno sovrapposti ai restanti angoli, e ad essi saranno eguali (C4), cioò *ΑΒΓ* eguale a *ΔEZ*, ed *ΑΓΒ* eguale a *ΔZE*.

Dunque, *se due triangoli*, etc., come dovevasi dimostrare.

5. — *Gli angoli alla base dei triangoli isosceli sono eguali tra loro, e, prolungati i lati eguali, gli angoli sotto la base, saranno eguali tra loro.*[21]

Sia il triangolo isoscele *ΑΒΓ* avente il lato *AB* eguale al lato *ΑΓ* e si prolunghino per diritto (P2) ad *AB*, *ΑΓ*, le rette *ΒΔ*, *ΓE*.

---

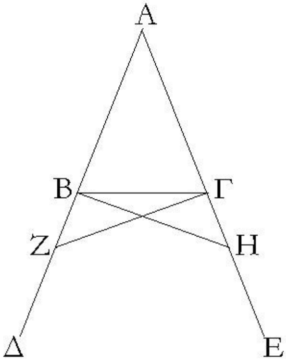
21 Si noti che il ragionamento ha una lieve imperfezione. Infatti a principio della dimostrazione si dice «*si tolga dalla maggiore AE*, la *AH* eguale alla *AZ*...». Come si può esser certi che sia *AE* maggiore di *AZ*? Evidentemente, o *prolungando* quanto occorre la *AE*, ovvero, il che è lo stesso *prendendo Z*, quanto occorre, vicino a *B*.

Un'altra dimostrazione della prima parte di questa proposizione è stata data da Proclo, il quale suppone che non si prolunghino i lati e si prenda *Δ* sul lato *AB*, e questa dimostraz. non è soggetta alla osservazione precedente.

Pappo, secondo quanto Proclo riferisce, dimostrava questa prima parte senza nessuna costruzione, considerando il triangolo *ΑΒΓ*, come *due* triangoli sovrapposti etc.

Dico che l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma B$, e che anche $\Gamma B\Delta$ è eguale a $B\Gamma E$.

Si prenda infatti sulla $B\Delta$ un punto a caso Z, e si tolga dalla maggiore AE la AH eguale alla AZ (3), e si conducano le rette $Z\Gamma$, HB (P1).



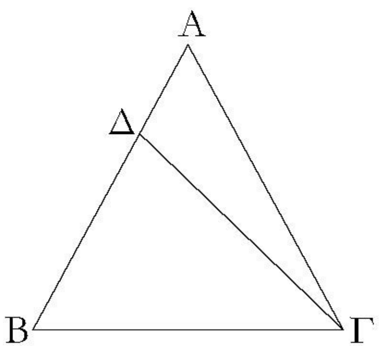
Poiché dunque AZ è eguale ad AH, ed AB è eguale ad $A\Gamma$, anche le due ZA, $A\Gamma$ sono eguali alle due HA, AB ciascuna a ciascuna, e comprendono l'angolo comune ZAH; perciò la base $Z\Gamma$ è eguale alla base BH ed il triangolo $AZ\Gamma$ al triangolo AHB, ed i restanti angoli sono eguali ai restanti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli cioè a cui sottendono eguali lati (4), cioè $A\Gamma Z$ è eguale ABH, ed $AZ\Gamma$ è eguale ad AHB. E poiché tutta la AZ è eguale alla AH, ed AB è eguale ad $A\Gamma$, la restante BZ è eguale alla restante ΓH (C3). Ma si è dimostrato che anche $Z\Gamma$ è eguale a HB.

Perciò le due BZ, $Z\Gamma$ sono eguali alle due ΓH, HB ciascuna a ciascuna, e l'angolo $BZ\Gamma$ è eguale all'angolo ΓHB, e la loro base $B\Gamma$ è comune. Perciò il triangolo $BZ\Gamma$ sarà eguale al triangolo ΓHB, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli ciascuno a ciascuno, quelli cioè a cui sottendono lati eguali (4). Quindi l'angolo $ZB\Gamma$ è eguale a $H\Gamma B$, e $B\Gamma Z$ è eguale a ΓBH. Ma poiché tutto l'angolo ABH è stato dimostrato eguale all'angolo $A\Gamma Z$, e di essi la parte ΓBH eguale ad $B\Gamma Z$, pure il resto $AB\Gamma$ è eguale al resto $A\Gamma B$ (C3); e sono alla base del triangolo *ΑΒΓ*. E già si era dimostrato che *ΖΒΓ* è eguale a *ΗΓΒ*, i quali sono sotto la base.

Dunque, *gli angoli alla base*, etc. come dovevasi dimostrare.

6. — *Se in un triangolo due angoli sono eguali tra loro, anche i lati sottendenti gli angoli eguali saranno eguali tra loro.*[22]

Sia il triangolo *ΑΒΓ* avente l'angolo *ΑΒΓ* eguale all'angolo *ΑΓΒ*.



Dico che anche il lato *ΑΒ* è eguale al lato *ΑΓ*.

Se infatti la *ΑΒ* non è eguale alla *ΑΓ*, una di esse è maggiore. Sia maggiore la *ΑΒ*, e si tolga dalla maggiore *ΑΒ* la *ΔΒ* eguale alla minore (3), e si congiunga la *ΔΓ*. Poiché dunque la *ΔΒ* è eguale alla *ΑΓ* e la *ΒΓ* è comune, le due *ΔΒ*, *ΒΓ* sono eguali alle due *ΑΓ*, *ΒΓ* ciascuna a cia-

22 In questa proposizione Euclide adopera per la prima volta il metodo di dimostrazione chiamato da Aristotele *riduzione all'assurdo* (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή, *Anal. prior.* I, 7, 29b 5) ovvero *dimostrazione per assurdo* (ἡ διὰ τοῦ ἀδυνάτου ἀπόδειξις, ibid. I, 29, 45a 35), od ancora *dimostrazione conducente all'assurdo* (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἄγουσα ἀπόδειξις, *Anal. post.* I, 24, 85a 16).

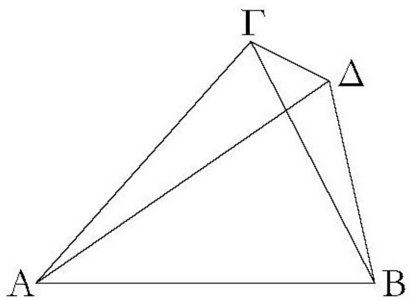
scuna, e l'angolo *ΔΒΓ* è eguale all'angolo *ΑΓΒ*, dunque la base *ΑΓ* è eguale alla base *ΑΒ*, ed il triangolo *ΔΒΓ* sarà eguale al triangolo *ΑΒΓ* (4), il minore al maggiore, il che è impossibile.

Dunque non è *ΑΒ* diseguale ad *ΑΓ*, dunque è eguale.

Dunque, *se in un triangolo*, etc. c. d. d.

7. — *Sulla stessa retta, a due stesse rette, non si possono condurre altre due rette, eguali ciascuna a ciascuna, a due punti diversi e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi delle due prime rette.*[23]

Poichè se è possibile, sulla stessa retta *ΑΒ*, alle due stesse rette *ΑΓ*, *ΓΒ* si conducano altre due rette *ΑΔ*, *ΔΒ* eguali ciascuna a ciascuna, a due punti diversi *Γ*, *Δ* e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi, cosicché *ΓΑ* sia eguale a *ΔΑ*, aventi lo stesso estremo *Α*, e *ΓΒ* sia eguale a *ΔΒ*, aventi lo stesso estremo *Β*.



Si conduca la *ΓΑ*.

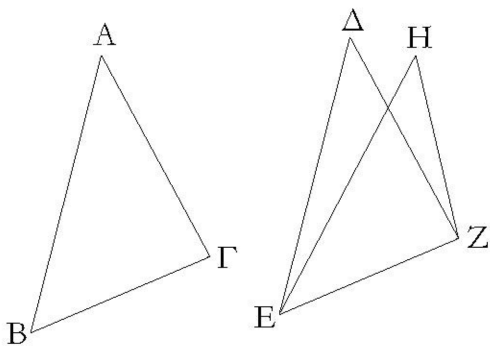
Poiché dunque *ΑΓ* è

23 L'enunciato della (7) tradotto letteralmente è oscuro. I diversi traduttori lo hanno alterato in varî modi. La versione *libera* piú semplice, e piú vicina al testo greco, ma chiara, sembra la seguente: «*A due punti diversi e dalla stessa parte di una stessa retta, non si possono condurre due rette eguali tra loro, da ognuno dei due estremi della retta*».

eguale ad $A\Delta$, l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale a $A\Delta\Gamma$ (5). Dunque $A\Delta\Gamma$ è maggiore di $\Delta\Gamma B$. E quindi $\Gamma\Delta B$ è molto maggiore di $\Delta\Gamma B$ (C5). Ma ancora, poiché ΓB è eguale a ΔB, l'angolo $\Gamma\Delta B$ è eguale a $\Delta\Gamma B$ (5). Ma si è dimostrato che è molto maggiore, il che è impossibile.

Dunque *sulla stessa retta* etc. c. d. d.

8. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed hanno la base eguale alla base, avranno anche eguali gli angoli compresi da rette eguali.*[24]



Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ aventi i due lati AB, $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE, ΔZ ciascuno a ciascuno, AB eguale a ΔE, ed $A\Gamma$ a ΔZ. Ed abbiano anche

24 Heath ha osservato che il testo greco cosí oscuro, faceva parte probabilmente della fraseologia tradizionale, e perciò sebbene vago, era facilmente capito dai geometri greci. Si trovano infatti enunciati spesso nello stesso modo ellittico ed oscuro, molti teoremi di geometria nelle opere di Aristotele.

Euclide dà soltanto il caso piú difficile, in cui si supponga il punto Δ esterno al triangolo $AB\Gamma$. Se Δ si suppone interno al triangolo, con qualche lieve semplificazione si può ripetere la stessa dimostrazione.

la base $B\Gamma$ eguale alla base EZ. Dico che anche l'angolo $BA\Gamma$ è eguale all'angolo $E\Delta Z$.

Infatti sovrapposto il triangolo $AB\Gamma$ sul triangolo ΔEZ e posto il punto B sul punto E e la retta $B\Gamma$ sulla retta EZ, anche il punto Γ si sovrapporrà al punto Z per essere $B\Gamma$ eguale ad EZ.

Ma sovrapposta la $B\Gamma$ sulla EZ, si sovrapporranno anche le BA, $A\Gamma$ sulle $E\Delta$, ΔZ. Poiché se la base $B\Gamma$ è sovrapposta alla EZ ed i lati BA, $A\Gamma$ non si sovrappongono sui lati $E\Delta$, ΔZ ma cadono fuori come in EH, HZ si saranno costruite sulla stessa retta, alle stesse due rette, altre due rette eguali, ciascuna a ciascuna, da due punti diversi e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi delle due prime rette.

Ma non si possono costruire (7); dunque non [è vero che] sovrapposta la base $B\Gamma$ sulla base EZ, non si sovrapporranno i lati BA, $A\Gamma$ ai lati $E\Delta$, ΔZ. Dunque si sovrapporranno. Dunque anche l'angolo $BA\Gamma$ si sovrapporrà all'angolo $E\Delta Z$ e sarà ad esso eguale.

Dunque *se due triangoli*, etc. c. d. d.

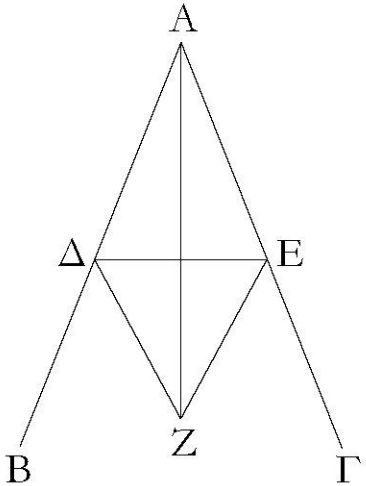
9. — *Dividere per metà un dato angolo rettilineo.*[25]

---

25 Già ai geometri greci era venuto il desiderio di trovare una costruzione per dividere un angolo in tre o in un maggior numero di parti eguali. Non essendovi riusciti, adoperando soltanto rette e circoli, adoprarono altre curve. NICOMEDE trisecò l'angolo per mezzo della *concoide*, ed ARCHIMEDE per mezzo dell'intersezione di un circolo e di una retta che ruota nel piano, nel suo *Lemma* VIII. IPPIA per mezzo della sua quadratrice, ed ARCHIMEDE colla

Sia $B A \Gamma$ il dato angolo rettilineo; occorre dividerlo per metà.

Si prenda sulla AB a caso il punto Δ, e si tolga dalla $A\Gamma$, la AE eguale alla $A\Delta$ (3), si conduca la ΔE e sulla ΔE si costruisca il triangolo equilatero ΔEZ (1), e si conduca la AZ.



Dico che l' angolo $BA\Gamma$ è diviso per metà dalla AE.

Poiché infatti $A\Delta$ è eguale alla AE, ed AZ è comune, le due ΔA, AZ sono eguali alle due EA, AZ ciascuna a ciascuna. E la base ΔZ è eguale alla base EZ. Perciò l'angolo ΔAZ è eguale all'angolo EAZ (8).

Dunque il dato angolo rettilineo $BA\Gamma$ è diviso per metà dalla retta AZ, come dovevasi fare.

10. — *Dividere per metà una data retta terminata*.[26]

---

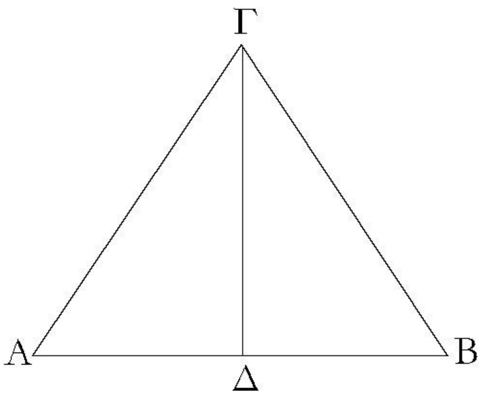
sua *spirale*, insegnarono a dividere un angolo in qualsivoglia numero di parti eguali. Soltanto i matematici del secolo XIX riuscirono a dimostrare che adoperando un numero finito di intersezioni di rette e di circoli, non si può trisecare un angolo qualunque.

26 Il problema analogo a quello della *trisezione* di un angolo, è la trisezione di una retta. Essa non può farsi senza ricorrere al postulato delle parallele (P5). La dimostrazione di questa impossibilità però non è semplice, cfr. nota alla (34).

Sia AB la retta data terminata; occorre dunque dividerla per metà.

Si costruisca su di essa il triangolo equilatero $A\Gamma B$ (1), e si divida per metà l'angolo $A\Gamma B$ colla retta $\Gamma\Delta$ (9).

Dico che la AB è divisa per metà nel punto Δ.



Infatti la $A\Gamma$ è eguale alla ΓB, la $\Gamma\Delta$ è comune, e le due $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ sono eguali alle due $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$. Perciò la base $A\Delta$ è eguale alla base $B\Delta$ (4).

Dunque la data retta terminata AB è divisa in Δ, c.d. f.

11. — *Ad una retta data, da un punto dato su di essa condurre una linea retta ad angolo retto.*[27]

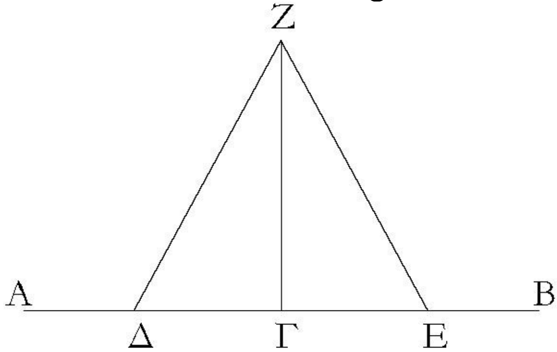
Sia AB la retta data, e sia Γ il punto dato su di essa. Si deve dunque dal punto Γ condurre alla retta AB una retta ad angolo retto.

Si prenda su AB un punto a caso Δ, e si prenda ΓE

27 A. De Morgan ha osservato che se, come oggi talvolta si fa, si includono gli angoli *piatti* tra gli angoli formati da due rette, (T 10) la (11) diventa un caso particolare della (9), la costruzione essendo la stessa.

eguale a *ΓΔ* (2), e su *ΔE* si costruisca un triangolo equilatero (1), e si conduca la *ZΓ*.

Dico che alla retta data *AB*, dal punto *Γ* dato su di essa, è stata condotta, ad angolo retto, la retta *ZΓ*.



Poiché infatti *ΔΓ* è eguale a *ΓE* e *ΓZ* è comune, le due rette *ΔΓ*, *ΓZ* sono eguali alle due *EΓ*, *ΓZ* ciascuna a ciascuna. E la base *ΔZ* è eguale alla base *ZE*. Perciò l'angolo *ΔΓZ* è eguale all'angolo *EΓZ*, e sono adiacenti (8). Ma quando una retta posta sopra una retta fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è retto (T 10).

Perciò *ΔΓZ*, *ZΓE* sono retti.

Perciò alla retta data *AB* dal punto dato su di essa *Γ* si è condotta la retta *ΓZ* ad angolo retto, c. d. f.

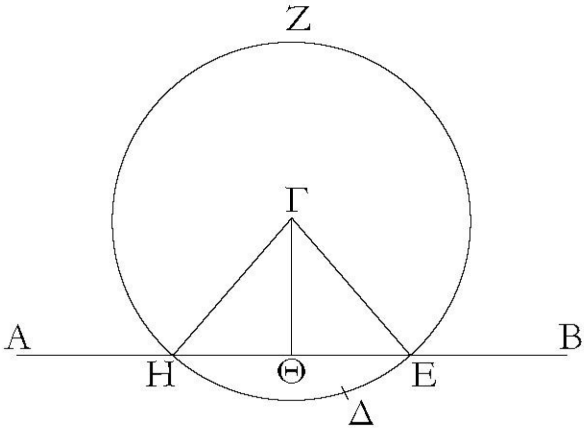
12. — *Ad una data retta infinita, da un punto dato che non è su di essa, condurre una linea retta perpendicolare.*[28]

---

28 Euclide suppone tacitamente che il circolo *EZH* tagli la retta *AB* in due, ed in due soli punti. A questa supposizione si può anche dare la forma seguente: *Ogni retta condotta per un punto interno ad un circolo, lo taglia in due punti*. Infatti, poiché si è preso *Δ* dall'altra parte di *AB*, la retta *ΓΔ* taglia *AB* in un punto in-

Sia AB la retta infinita data e sia Γ il punto che non è su di essa.

Si deve dunque condurre alla retta data infinita AB, dal punto dato Γ che non è su di essa, una linea retta perpendicolare.



Si prenda dall'altra parte della retta AB, a caso, un punto Δ e con centro Γ e distanza $\Gamma\Delta$ si descriva il circolo EZH (P3). E si divida la retta EH per metà in Θ (10), e si congiungano le ΓH, $\Gamma\Theta$, ΓE.

Dico che alla retta data infinita AB, dal punto Γ che non è su di essa, è stata condotta la perpendicolare $\Gamma\Theta$.

Poiché infatti la $H\Theta$ è eguale alla ΘE, e $\Theta\Gamma$ è comune, le due $H\Theta$, $\Theta\Gamma$ sono eguali alle due $E\Theta$, $\Theta\Gamma$, ciascuna a ciascuna. E la base ΓH è eguale alla base ΓE. Dunque l'angolo $\Gamma\Theta H$ è eguale all'angolo $E\Theta\Gamma$ (8), e sono

---

terno al circolo, ed AB è condotta per questo punto.

Tale supposizione, sebbene sia facilmente ammessa da chi comincia a studiare geometria, si può dedurre dalle proposizioni precedenti (come ha dimostrato HEATH, p. 273-274). Già PROCLO aveva tentato dimostrare che il circolo non incontra la retta in *piú di due* punti.

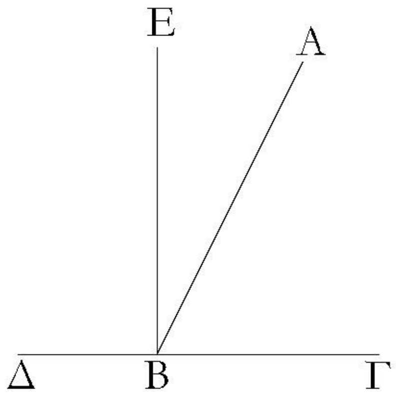
adiacenti. Ma quando una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è retto, e la retta posta si chiama perpendicolare a quella su cui è stata posta (T 10).

Dunque alla data retta infinita *AB*, dal punto dato *Γ* che non è su di essa, si è condotta la perpendicolare *ΓΘ*, c. d. f.

13. — *Se una retta, posta sopra una retta fa degli angoli, farà due angoli retti, o eguali a due retti.*

Infatti una retta *AB* posta sulla *ΓΔ* faccia gli angoli *ΓBA*, *ABΔ*.

Dico che gli angoli *ΓBA*, *ABΔ* o son due retti, o sono eguali a due retti.



Poiché se *ΓBA* è eguale a *ABΔ*, essi sono due retti (T10). Ma se no, dal punto *B* si conduca la *BE*, ad angolo retto alla *ΓΔ* (11); dunque *ΓBE*, *EBΔ* son due retti. E poichè *ΓBE* è eguale ai due *ΓBA*, *ABE*, si aggiunga *EBΔ* comune. Dunque *ΓBE*, *EBΔ* sono eguali ai tre *ΓBA*, *ABE*, *EBΔ* (C2).

Ed ancora, poiché *ΔBA* è eguale ai due *ΔBE*, *EBA*, si aggiunga *ABΓ*, comune. Dunque *ΔBA*, *ABΓ* sono eguali ai tre *ΔBE*, *EBA*, *ABΓ* (C2). Ma si è dimostrato che anche *ΓBE*, *EBΔ* sono eguali agli stessi tre. Ma le cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro; dunque *ΓBE*, *EBΔ*, sono eguali a *ΔBA*, *ABΓ*.

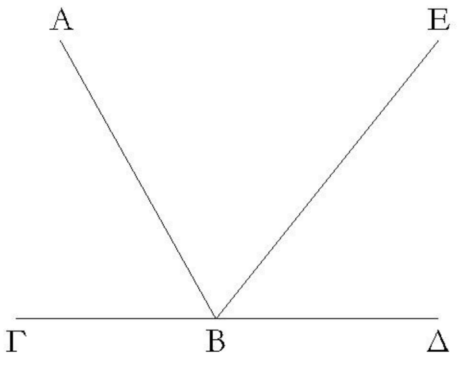
Ma *ΓBE*, *EBΔ* son due retti, dunque *ΔBA*, *ABΓ* sono eguali a due retti.

Dunque, *se una retta posta*, etc. c. d. d.

14. — *Se con una retta, e in un punto su di essa, due rette non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti, le due rette saranno per diritto tra loro.*

Con una retta *AB*, e nel punto *B* su di essa, le due rette *BΓ*, *BΔ* che non son poste dalla stessa parte, facciano gli angoli adiacenti *ABΓ*, *ABΔ* eguali a due retti.

Dico che *BΔ* è per diritto alla *ΓB*.



Se infatti *BΔ* non è per diritto alla *ΓB*, sia *BE* per diritto alla *ΓB*.

Poiché dunque la retta *AB* è posta sulla *ΓBE*, gli angoli *ABΓ*, *ABE* sono eguali a due retti (13). Ma anche *ABΓ*, *ABΔ* sono eguali a due retti. Dunque *ABΓ*, *ABE* sono eguali a *ABΓ*, *ABΔ* (C1). Si tolga *ΓBA*, comune. Dunque il resto *ABE* è eguale al resto *ABΔ* (C3), il minore al maggiore, ciò che è impossibile.

Dunque *BE* non è per diritto alla *ΓB*. Similmente si dimostrerà che nessun'altra retta lo è, oltre la *BΔ*.

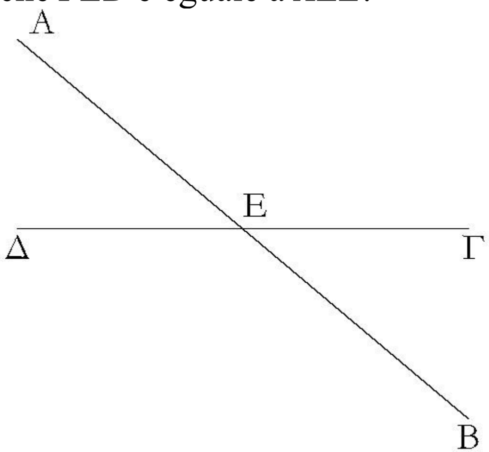
Adunque *ΓB* è per diritto alla *BΔ*.

Dunque, *se con una retta*, etc. c. d. d.

15. — *Se due rette si tagliano tra di loro, fanno gli angoli al vertice eguali tra loro.*

Infatti, le due rette *AB*, *ΓΔ* si taglino tra loro nel punto *E*.

Dico che l'angolo *AEΓ* è eguale all'angolo *ΔEB*, e che *ΓEB* è eguale a *AEΔ*.



Poiché infatti la retta *AE* è posta sulla *ΔΓ*, facendo gli angoli *ΓEA*, *AEΔ*, i due angoli *ΓEA*, *AEΔ* sono eguali a due retti (13). Ed ancora, poiché la retta *ΔE* è posta sulla retta *AB* facendo gli angoli *AEΔ*, *ΔEB*, anche gli angoli *AEΔ*, *ΔEB* sono eguali a due retti. Dunque gli angoli *ΓEA*, *AEΔ* sono eguali agli angoli *AEΔ*, *ΔEB* (C1). Si tolga *AEΔ* comune; allora il resto *ΓEA* è eguale al resto *BEΔ*. Similmente si dimostrerà che anche *ΓEB*, *ΔEA* sono eguali.

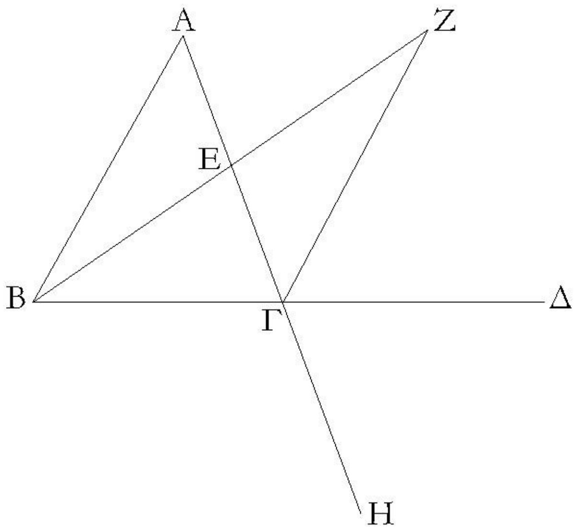
Dunque, *se due rette*, etc. c. d. d.

16. — *In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti.*

Sia il triangolo *ABΓ*, e si prolunghi un lato *BΓ* di esso fino in *Δ*.

Dico che l'angolo esterno *AΓΔ* è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti *ΓBA*, *BAΓ*.

Si divida per metà la *AΓ* in *E* (10), e condotta la *BE*, si prolunghi per diritto fino in *Z*, e si ponga *EZ* eguale alla *BE*, e si conduca la *ZΓ*, esi prolunghi la *AΓ* fino in *H*.



Poiché dunque *AE* è eguale alla *EΓ*, e la *BE* alla *EZ*, le due *AE*, *EB* sono eguali alle due *ΓE*, *EZ*, ciascuna a ciascuna. E l'angolo *AEB* è eguale all'angolo *ZEΓ*; sono infatti opposti al vertice (15). Dunque la base *ZΓ* è eguale alla base *AB*, ed il triangolo *ABE* è eguale al triangolo *ZEΓ* ed i restanti angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, quelli sottesi da lati eguali (4).

Dunque *BAE* è eguale a *EΓZ*. Ma *EΓΔ* è maggiore di *EΓZ* (C5), dunque *AΓΔ* è maggiore di *BAE*.

Similmente, divisa per metà la *BΓ* si dimostrerà che *BΓH*, o ciò che è lo stesso *AΓΔ*, è maggiore di *ABΓ*.

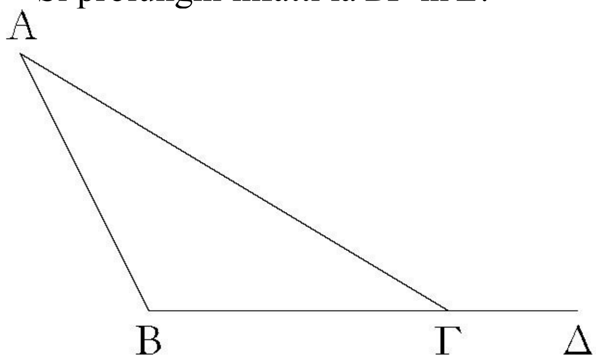
Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

17. — *In ogni triangolo due angoli comunque presi, son minori di due retti*.[29]

Sia il triangolo *ABΓ*.

Dico che due angoli del triangolo *ABΓ*, comunque presi, sono minori di due retti.

Si prolunghi infatti la *BΓ* in *Δ*.



E poiché nel triangolo *ABΓ* l'angolo *AΓΔ* è esterno, è maggiore dell'interno ed opposto *ABΓ* (16).

Si aggiunga

29 Si osservi che questa proposizione è inversa del postulato 5, del quale si farà uso soltanto dalla (29) in poi. Infatti il (P5) afferma che, se due rette, incontrate da un'altra, fanno gli angoli interni dalla stessa parte minori di due retti, esse s'incontrano. Questa (17), afferma invece, che se due rette s'incontrano, e sono incontrate da un'altra (formando cosí un triangolo), fanno con questa gli angoli interni dalla parte da cui s'incontrano (che son due angoli del triangolo), minori di due retti.

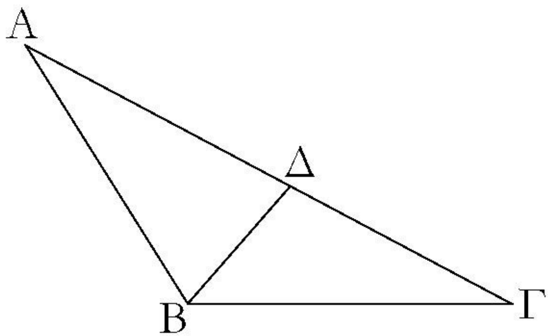
ΑΓΒ, comune. Dunque gli angoli *ΑΓΔ*, *ΑΓΒ* son maggiori di *ΑΒΓ*, *ΒΓΑ* (C4). Ma *ΑΓΔ*, *ΑΓΒ* sono eguali a due retti (13).

Dunque *ΑΒΓ*, *ΒΑΓ* son minori di due retti.

Similmente dimostreremo che anche *ΒΑΓ*, *ΑΓΒ* son minori di due retti, e cosí pure *ΑΓΒ*, *ΑΒΓ*.

Adunque in ogni triangolo, etc., c. d. d.

18. — *In ogni triangolo, il maggior lato sottende il maggior angolo*.[30]



Sia infatti il triangolo *ΑΒΓ* avente il lato *ΑΓ* maggiore di *ΑΒ*.

Dico che anche l'angolo *ΑΒΓ* è maggiore di *ΒΓΑ*.

Poiché infatti *ΑΓ* è maggiore di *ΑΒ*, si ponga *ΑΔ* eguale ad *ΑΒ* (2) e si congiunga *ΒΔ*.

Poiché nel triangolo *ΒΓΔ*, l'angolo *ΑΔΒ* è esterno, es-

30 Da questa proposizione si ricava con una regola di logica pura la proposizione (6). Si ha infatti la proposizione: a, b ε Cls. ɔ: *a* ɔ b. = ▬ *b* ɔ ▬ *a* (G. Peano, Aritmetica generale ed algebra elementare; Torino, Paravia 1902 p. 7). Ora dalla (18) si ricava:

▬ (triangoli isosceli) ɔ ▬ (triangoli aventi gli angoli alla base eguali). Quindi: (triangoli aventi gli angoli alla base eguali) ɔ (triangoli isosceli), che è la (6).

so è maggiore dell'interno ed opposto *ΔΓΒ* (16); ed ancora l'angolo *ΑΔΒ* è eguale a *ΑΒΔ*, poiché il lato *ΑΒ* è eguale ad *ΑΔ* (5); è dunque anche *ΑΒΔ* maggiore di *ΑΓΒ*. Dunque *ΑΒΓ* è ancor maggiore di *ΔΓΒ* (C5).

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

19. — *In ogni triangolo, il maggior angolo è sotteso dal maggior lato*.[31]

Sia *ΑΒΓ* il triangolo avente l'angolo *ΑΒΓ* maggiore dell'angolo *ΒΓΑ*.

Dico che anche il lato *ΑΓ* è maggiore del lato *ΑΒ*.

---

31 Augustus De Morgan (*Formal logic*, 1847, p. 25) secondo un passo riferito da Heath (p. 284), ha osservato che le (6) e (19) si deducono contemporaneamente dalle (5) e (18), con pure operazioni di logica. Se infatti si hanno due terne di proposizioni *p, q, r* ed *x, y, z*, tali che di ogni terna, una ed una sola sia vera, cioè sia: $p = - q - r,\ q = - r - p,\ r = - p - q$, e cosí pure $x = - y - z$, etc. allora si ha:

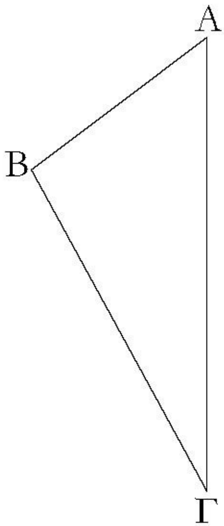
$$x \supset p.\ y \supset q.\ x \supset r.\ \supset.\ p \supset x.\ q \supset y.\ r \supset z.$$

Se ora denotiamo con *a, b* due lati di un triangolo e con *A, B* gli angoli opposti; le due terne di proposizioni; $a=b,\ a<b,\ a>b;\ A=B,\ A<B,\ A>B,$ soddisfanno alle condizioni sopra indicate; ed inoltre:

$a=b.\ \supset.\ A=B$ (5); $a<b.\ \supset.\ A<B$ (18);
$a>b.\ \supset.\ A>B$ (18).

perciò anche:

$A=B.\ \supset.\ a=b$ (6); $A<B.\ \supset.\ a<b.$ (19);
$A>B.\ \supset.\ a>b$ (19).



Se infatti non è, la *AΓ* è eguale o minore della *AB*. Ma non è *AB* eguale ad *AΓ* poiché allora sarebbe anche *ABΓ* eguale a *AΓB* (5). E nemmeno è *AΓ* minore di *AB*, poiché allora sarebbe *ABΓ* minore di *AΓB* (18), il che non è. Dunque non è *AΓ* minore di *AB*. Ma si è dimostrato che non è neppure eguale, dunque *AΓ* è maggiore di *AB*.

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

20. — *In ogni triangolo, due lati sono maggiori del restante, comunque siano presi*.[32]

Sia infatti il triangolo *ABΓ*.

---

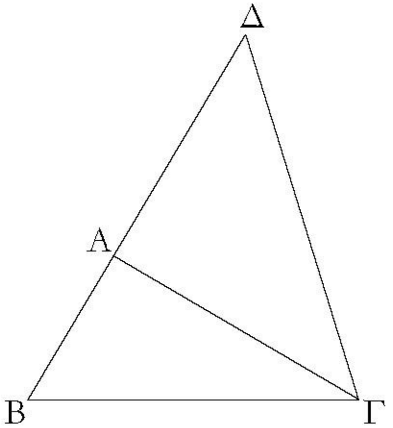
32 Secondo uno scoliaste greco (EUCLIDE, ed HEIBERG, vol. V p. 156), gli Epicurei dicevano inutile questo teorema (20) osservando che era evidente anche ad un asino, e non aveva bisogno di nessuna dimostrazione.

Archimede (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* lib. I.) comincia col postulato «La retta è la minima di tutte le linee contermini». (*Λαμβάνω δὲ ταῦτα· Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν*).

La dimostrazione di Euclide, assai elegante, ha lo scopo di enunciare una condizione necessaria perchè tre rette formino un triangolo (22). Essa serve inoltre a mostrare che il numero degli assiomi da cui si possono dedurre le verità della geometria è piccolo.

Dico che due lati son maggiori del restante comunque siano presi, cioè *BA*, *AΓ* maggiori di *BΓ*; *AB*, *BΓ* maggiori di *AΓ*; *BΓ*, *ΓA* maggiori di *AB*.

Si prolunghi infatti la *BA* verso il punto *Δ*, e si ponga *AΔ* eguale a *ΓA*, e si congiunga la *ΔΓ*.



Poiché dunque *ΔA* è eguale ad *AΓ* l'angolo *AΔΓ* è eguale all'angolo *AΓΔ* (5). Dunque *BΓΔ* è maggiore di *AΔΓ*. E poiché il triangolo *AΓB* ha l'angolo *BΓΔ* maggiore dell'angolo *BΔΓ*, ed al maggior angolo sottende il maggior lato (19), la *ΔB* è dunque maggiore della *BΓ*. Ma *ΔA* è eguale a *AΓ*; dunque le *BA*, *AΓ* son maggiori della *BΓ*. Similmente dimostreremo che *AB*, *BΓ* son maggiori di *AΓ*, e che *BΓ*, *ΓA* son maggiori di *AB*.

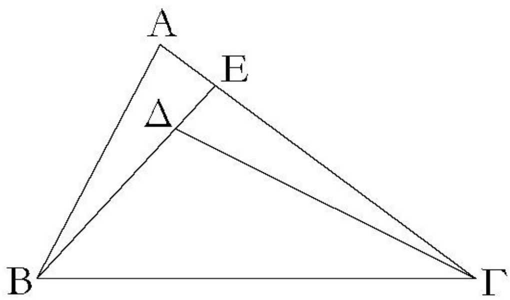
Dunque, in ogni triangolo, etc. c. d. d.

21. — *Se in un triangolo, dagli estremi di un lato si congiungono due rette internamente, le due rette congiunte saranno minori dei due restanti lati del triangolo, e comprenderanno un angolo maggiore.*

Infatti, nel triangolo *ABΓ* dagli estremi *B, Γ* di un lato *BΓ*, si congiungano due rette internamente *BΔ*, *ΔΓ*.

Dico che le *BΔ*, *ΔΓ* sono minori dei due restanti lati del triangolo *BA*, *ΑΓ* ma che comprendono un angolo *ΒΔΓ* maggiore dell'angolo *ΒΑΓ*.

Si prolunghi infatti la *ΒΔ* in *E*. E poiché in ogni triangolo due lati son maggiori del restante (20), i due lati *AB*, *AE* del triangolo *ABE* son maggiori di *BE*; si aggiunga *ΕΓ*, comune; dunque *BA*, *ΑΓ* son maggiori di



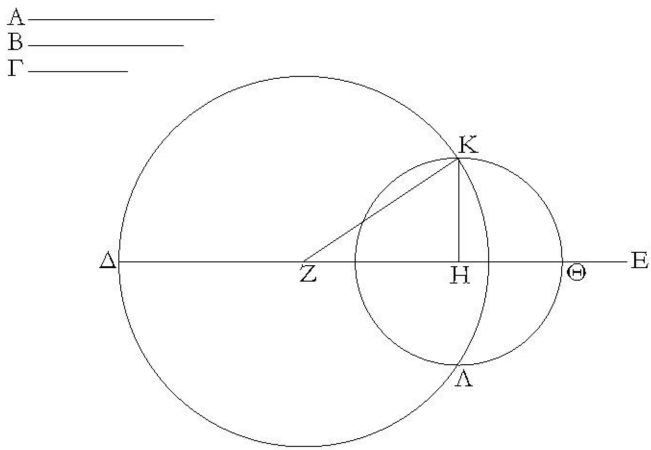
BE, *ΕΓ* (C2). Ancora, i due lati *ΓΕ*, *ΕΔ* del triangolo *ΓΕΔ* son maggiori di *ΓΔ*; si aggiunga *AB*, comune; dunque *ΓΕ*, *EB* son maggiori di *ΓΔ*, *ΔΒ*. Ma *BE*, *ΕΓ* si erano dimostrate minori di *BA*, *ΑΓ*; dunque *BA*, *ΑΓ* sono molto maggiori di *ΒΔ*, *ΔΓ*.

Ancora, poiché in ogni triangolo, l'angolo esterno è maggiore di un interno ed opposto (16), dunque nel triangolo *ΓΔΕ* l'angolo esterno *ΒΔΓ* è maggiore di *ΓΕΔ*. E per la stessa ragione anche nel triangolo *ABE* l'angolo *ΓΕΒ* è maggiore di *ΒΑΓ*. Ma si è dimostrato che *ΒΔΓ* è maggiore di *ΓΕΒ*. Dunque *ΒΔΓ* è molto maggiore di *ΒΑΓ*.

Dunque, *se in un triangolo*, etc., c. d. d.

22. — *Con tre rette, che sono eguali a tre date, costruire un triangolo; due di esse devono naturalmente esser maggiori della restante, comunque si prendano*

[20].[33]



Siano *A, B, Γ* le tre rette date, delle quali due son maggiori della restante, comunque prese, *A, B* maggiori di *Γ*; *A*, *Γ* di *B*; e *B*, *Γ* di *A*. Si deve dunque costruire un triangolo con tre rette eguali alle *A, B, Γ*.

Si prenda una retta *ΔE* terminata in *Δ* e infinita verso *E* e si ponga *ΔZ* eguale ad *A*, *ZH* eguale a *B*, ed *HΘ* eguale a *Γ*. Con centro *Z* e con distanza *ZΔ* si descriva il circolo *ΔKΛ*; ed ancora con centro *H* e con distanza *HΘ* si descriva il circolo *KΛΘ*, e si conducano le *KZ*, *KH*.

Dico che con tre rette eguali alle *A, B, Γ* si è costruito

33 Euclide non dimostra che i due circoli si tagliano in K. Come nella (1), egli ammette come evidente che *se un circolo ha un punto esterno ad un altro circolo, ed un punto interno ad esso, lo taglia*. Non è da escludersi che sotto questa o sotto altra forma, una tale proprietà del circolo si sia potuta trovare nella primitiva redazione dei postulati o delle definizioni.

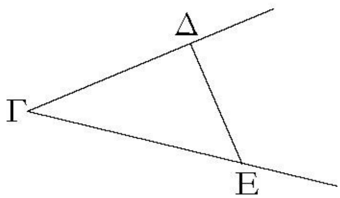
il triangolo *KZH*.

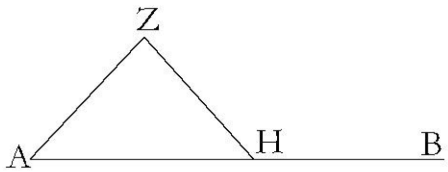
Poiché infatti il punto *Z* è centro del circolo *ΔKΛ*, la *ZΔ* è eguale alla *ZK*. Ma la *ZΔ* è eguale ad *A*; dunque anche la *ZK* è eguale ad *A* (C1). Ancora, poiché il punto *H* è centro del circolo *ΛKΘ*, la *HΘ* è eguale alla *HK*. Ma la *HΘ* è eguale a *Γ*; dunque anche la *KH* è eguale a *Γ*. Ma anche la *ZH* è eguale a *B*. Dunque le tre rette *KZ*, *ZH*, *HK* sono eguali alle tre *A, B, Γ*.

Dunque con le tre rette *KZ*, *ZH*, *HK,* che sono eguali alle tre rette date *A, B, Γ*, si è costruito il triangolo *KZH*; c. d. f.

23. — *Su una retta data ed in un punto dato in essa, costruire un angolo rettilineo eguale ad un angolo rettilineo dato*.

Sia *AB* la retta data, ed *A* il punto dato in essa, e sia *ΔΓE* l'angolo rettilineo dato.





Si deve dunque sulla retta data *AB* e nel punto dato in essa *A*, costruire un angolo rettilineo eguale a *ΔΓE*.

Si prendano su ognuna delle due *ΓΔ, ΓE* due punti a caso *Δ, E* e si congiunga la *ΔE*. E con tre rette, le quali siano eguali alle tre *ΓΔ, ΔE, ΓE* si costruisca il triangolo *AZH*, cosicché sia *ΓΔ* eguale ad *AZ*, *ΓE* ad *AH*, e *ΔE* a *ZH* (22).

Poiché le due *ΔΓ, ΓE* sono eguali alle due *ZA*, *AH* ciascuna a ciascuna, e la base *ΔE* è eguale alla base *ZH*, l'angolo *ΔΓE* è eguale a *ZAH* (8).

Dunque su la retta data *AB* e nel punto dato in essa *A*, si è costruito l'angolo rettilineo *ZAH*, eguale all'angolo rettilineo dato *ΔΓE*; c. d. f.

24. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, ma hanno un angolo maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette eguali, avranno anche la base maggiore della base.*[34]

---

34 L'enunciato di questo teorema (e cosí pure quello del teorema successivo), è poco chiaro, quando si traduce alla lettera. Una traduzione libera potrebbe essere questa:

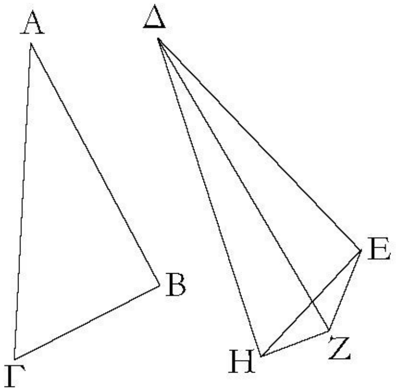
24. *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ma l'angolo compreso dai lati eguali in uno dei due triangoli, è maggiore dell'angolo corrispondente dell'altro triangolo, anche la base del primo triangolo sarà maggiore della base dell'altro.*

Euclide svolge soltanto un caso, quello in cui *Z* cade al di fuori del triangolo *ΔEH*. Gli altri due casì (in cui *Z* cade sulla *HE*, ovvero dentro il triangolo *ΔEH*) hanno una dimostrazione analoga, ma alquanto piú semplice (svolta da Proclo). Simson ha osservato che se si chiama *ΔE* il piú corto dei due lati *ΔE*, *ΔZ*, allora necessariamente *Z* cade fuori del triangolo *ΔEH* e si ha il solo caso svolto da Euclide. Occorre però dimostrarlo. Si può far cosí. Sia $\Delta H \geq \Delta E$. Si prolunghi infatti se occorre *ΔZ*, fino ad incontrare *EH* in *K*.

Siano i due triangoli *ABΓ*, *ΔEZ* aventi i due lati *AB*, *AΓ* eguali ai due lati *ΔE*, *ΔZ* ciascuno a ciascuno, *AB* eguale a *ΔE*, ed *AΓ* a *ΔZ*; e l'angolo in *A* maggiore dell'angolo in *Δ*.

Dico che anche la base *BΓ* è maggiore della base *EZ*.

Poiché infatti l'angolo *BAΓ* è maggiore dell'angolo *EΔZ*, sulla retta *ΔE* e nel punto in essa *Δ*, si costruisca l'angolo *EΔH* eguale all'angolo *BAΓ* e si ponga *ΔH* eguale a ciascuna delle due *AΓ*, *ΔZ*, e si congiungano le *EH*, *ZH*.



Poiché dunque *AB* è eguale a *ΔE* ed *AΓ* a *ΔH*, le due *BA*, *AΓ* sono eguali alle due *EΔ*, *ΔH* ciascuna a ciascuna, e l'angolo *BAΓ* è eguale all'angolo *EΔH*. Dunque la base *BΓ* è eguale alla base *EH* (4). Ed ancora, poiché *ΔZ* è eguale a *ΔH*, l'angolo *ΔHZ* è eguale all'angolo *ΔZH* (5).

Dunque *ΔZH* è maggiore di *EHZ* (C5). Dunque *EZH* è molto maggiore di *EHZ* (C5). E poiché il triangolo *EZH* ha l'angolo *EZH* maggiore dell'angolo *EHZ*, e al

---

allora $\Delta KH > \Delta EK$ (16)

$\Delta EK \geq \Delta HK$ (18)

quindi $\Delta KH > \Delta HK$ quindi $\Delta H > \Delta K$ (19)

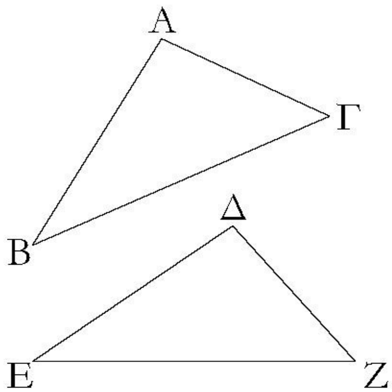
e poichè $\Delta Z = \Delta H$, $\Delta K < \Delta Z$, quindi *Z* cade fuori di *ΔEK* c. d. d.

maggior angolo sottende il maggior lato (19), è dunque il lato *EH* maggiore di *EZ*. Ma *EH* è eguale a *BΓ*; dunque *BΓ* è maggiore di *EZ*.

Dunque, *se due triangoli*, etc., c. d. d.

25. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed hanno la base maggiore della base, anche un angolo, sarà maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette eguali*.

Siano due triangoli *ABΓ*, *ΔEZ*, aventi i due lati *AB*, *AΓ* eguali ai due lati *ΔE*, *ΔZ* ciascuno a ciascuno, *AB* eguale a *ΔE* ed *AΓ* eguale a *ΔZ*; e la base *BΓ* sia maggiore della base *EZ*.

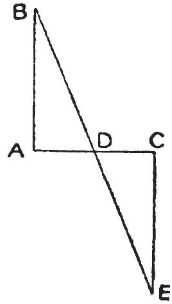


Dico che anche l'angolo *BAΓ* è maggiore dell'angolo *EΔZ*.

Se infatti non è [maggiore], o è eguale o minore ad esso. Ma non è *BAΓ* eguale a *EΔZ*, poiché allora anche la base *BΓ* sarebbe eguale alla base *EZ* (4). Ma non è. Dunque l'angolo *BAΓ* non è eguale a *EΔZ*. E nemmeno è *BAΓ* minore di *EΔZ*. Poiché allora anche la base *BΓ* sarebbe minore della base *EZ* (24). Ma non è. Dunque l'angolo *BAΓ* non è minore di *EΔZ*. Ma si è mostrato che non è nemmeno eguale. Dunque *BAΓ* è maggiore di *EΔZ*.

Dunque, *se due triangoli*, etc., c. d. d.

26. — *Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, o quello tra gli angoli eguali, o uno di quelli sottendenti gli angoli eguali, avranno anche eguali i restanti lati ai restanti lati [ciascuno a ciascuno], ed il restante angolo al restante angolo*.[35]



Siano i due triangoli *ΑΒΓ*, *ΔΕΖ* aventi i due angoli *ΑΒΓ*, *ΒΓΑ* eguali ai due *ΔΕΖ*, *ΕΖΔ* ciascuno a ciascuno, *ΑΒΓ* eguale a *ΔΕΖ*, e *ΒΓΑ* a *ΕΖΔ*. Ed abbiano un lato eguale ad un lato, e dapprima quello compreso tra gli angoli eguali, *ΒΓ* eguale a *ΕΖ*.

Dico che avranno anche i restanti lati eguali ciascuno a ciascuno, *ΑΒ* a *ΔΕ*, e *ΑΓ* a *ΔΖ*; e il restante angolo *ΒΑΓ* eguale al restante angolo *ΕΔΖ*.

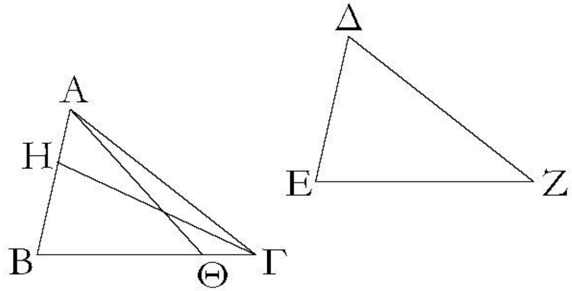
Se infatti *ΑΒ* non è eguale a *ΔΕ*, uno di essi è maggio-

---

35 Questa proposizione, come pure la (15) sono attribuite a TALETE, da PROCLO. Secondo la ricostruzione di TANNERY, TALETE il quale secondo PROCLO «avrebbe, per mezzo di questo teorema, trovato il modo di misurare la distanza di una nave in mare, dalla riva», avrebbe fatto cosí: Fissati sulla spiaggia due punti A, C il loro punto medio D e le due direzioni AB, CE perpendicolari alla AC, quando in A si osservi la nave B che fa l'angolo BAC retto, e da D si osserva che BDE sono in linea retta, la distanza CE che si può poi misurare sul suolo, è uguale alla AB, perché per la (15) ADB=CDE, e per la (26) ABD=CED, quindi AB=CE.

re. Sia maggiore *AB* e si ponga *BH* eguale a *ΔE*, e si congiunga la *HΓ*.

Poiché dunque *BH* è eguale a *ΔE*, e *BΓ* a *EZ*, le due *BH*, *BΓ* sono eguali alle due *ΔE*, *EZ* ciascuna a ciascuna; e l'angolo *HBΓ* è eguale all'angolo *ΔEZ*. Dunque la base *HΓ* è eguale alla base *ΔZ*, e il triangolo *HBΓ* è eguale al triangolo *ΔEZ*, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, quelli a cui sottendono lati eguali (4). Dunque l'angolo *HΓB* sarà eguale all'angolo *ΔZE*. Ma *ΔZE* si è supposto eguale a *BΓA*, dunque *BΓH* è eguale a *BΓA* (C1), il minore al maggiore, il che è impossibile (C5). Dunque *AB* non è diseguale a *ΔE*; dunque è eguale. Ma *BΓ* è eguale ad *EZ*. Dunque le due *AB*, *BΓ* sono eguali alle due *ΔE*, *EZ* ciascuna a ciascuna; e l'angolo *ABΓ* è eguale all'angolo *ΔEZ*. Dunque la base *AΓ* è eguale alla base *ΔZ*, ed il restante angolo *BAΓ* è eguale al restante angolo *EΔZ* (4).



Siano ora invece eguali i lati sottendenti angoli eguali, come *AB* a *ΔE*. Dico che i restanti lati saranno eguali ai restanti lati *AΓ* a *ΔZ*, e *BΓ* ad *EZ*, e che anche il restante angolo *BAΓ* è eguale al restante angolo *EΔZ*.

Se infatti *BΓ* non è eguale ad *EZ*, uno di essi è maggiore. Sia maggiore, se è possibile, *BΓ*, e si ponga *BΘ* eguale ad *EZ*, e si congiunga la *AΘ*.

E poiché *BΘ* è eguale ad *EZ*, e *AB* a *ΔE*, le due *AB*, *BΘ* sono eguali alle due *ΔE*, *EZ*, ciascuna a ciascuna, e comprendono angoli eguali. Dunque la base *AΘ* è eguale alla base *AZ*, ed il triangolo *ABΘ* è eguale al triangolo *ΔEZ*, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, quelli a cui sottendono lati eguali. Dunque l'angolo *BΘA* è eguale all'angolo *EZΔ*. Ma *EZΔ* è eguale a *BΓA*. Dunque l'angolo esterno *BΘA* del triangolo *AΘΓ* è eguale all'interno ed opposto *BΓA*; il che è impossibile (16). Dunque *BΓ* non è diseguale a *EZ*; dunque è eguale. Dunque le due *AB*, *BΓ* sono eguali alle due *ΔE*, *EZ*, ciascuna a ciascuna, e comprendono angoli eguali. Dunque la base *AΓ* è eguale alla base *ΔZ*, e il triangolo *ABΓ* è eguale al triangolo *ΔEZ*, ed il restante angolo *BAΓ* è eguale al restante angolo *EΔZ*.

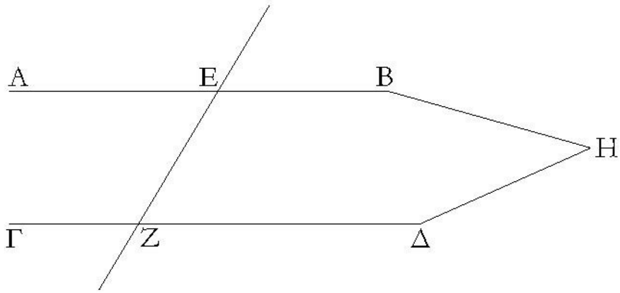
Dunque, *se due triangoli*, etc., c. d. d.

27. — *Se una retta cadendo su due rette fa gli angoli alterni eguali tra loro, le rette saranno parallele tra loro.*[36]

---

36 27. Augustus De Morgan ha osservato (*Companion to the almanac for* 1849, p. 8) che la (27) è una forma diversa della (16). Si passa dall'una all'altra con la regola di logica: *a, b* ε Cls. ɔ: *a* ɔ *b* .=. ▬ *b* ɔ ▬ *a* (cfr. nota alla [18]).

Se con *a* si intende la classe delle coppie di rette che fanno un triangolo con una trasversale, e con *b* la classe delle coppie di rette che fanno con una trasversale i due angoli alterni (cioè interno ed esterno) non eguali tra loro, allora la (16) ha la forma a ɔ b, e la (27) la forma: ▬ *b* ɔ ▬ *a*. Il ragionamento di Euclide è pure, Infatti la retta EZ cadendo sulle due rette AB, $\Gamma\Delta$ formi gli angoli alterni AEZ, $EZ\Delta$ eguali tra loro. Dico che AB è parallela a $\Gamma\Delta$.



Se infatti non è, prolungate le AB, $\Gamma\Delta$ si incontreranno dalla parte B, Δ ovvero dalla parte A, Γ. Si prolunghino e si incontrino dalla parte B, Δ in H. L'angolo esterno AEZ del triangolo HEZ è eguale all'interno ed opposto EZH, il che è impossibile (16). Dunque le AB, $\Gamma\Delta$ prolungate dalla parte B, Δ non si incontreranno. Allo stesso modo si dimostrerà che nemmeno si incontrano dalla parte A, Γ. Ma se due rette non s'incontrano da nessuna delle due parti son parallele (T23). Dunque AB è parallela a $\Gamma\Delta$.

Dunque; *se una retta cadendo*, etc. c. d. d.

28. *Se una retta cadendo su due rette fa l'angolo esterno eguale all'interno ed opposto dalla stessa parte,*

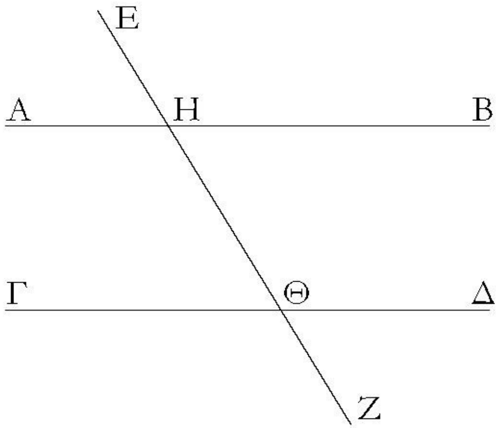
---

in fondo lo stesso.

Questa nuova forma data da Euclide alla (16) ha lo scopo di collegare le proposizioni seguenti (27)–(34) che trattano delle proprietà delle parallele, con quelle che precedono le quali trattavano delle proprietà dei triangoli.

ovvero i due interni dalla stessa parte eguali a due retti, le rette saranno parallele tra loro.

Infatti, la retta *EZ* cadendo sulle due rette *AB*, *ΓΔ* faccia l'angolo esterno *EHB* eguale all'interno ed opposto *HΘΔ*, ovvero gli angoli interni dalla stessa parte *BHΘ*, *HΘΔ* eguali a due retti. Dico che la *AB* è parallela alla *ΓΔ*.



Poiché infatti *EHB* è eguale a *HΘΔ*, e poiché *EHB* è eguale ad *AHΘ* (15), anche *AHΘ* è eguale a *HΘΔ* (C1), e sono alterni. Quindi *AB* è parallela a *ΓΔ* (27).

Ancora, poiché *BHΘ*, *HΘΔ* sono eguali a due retti, e poiché *AHΘ*, *BHΘ* sono anche eguali a due retti, (13), saranno anche *AHΘ*, *BHΘ* eguali a *BHΘ*, *HΘΔ* (C1). Si tolga *BHΘ* comune. Il resto *AHΘ* è allora eguale al resto *HΘΔ* (C3), e sono alterni, quindi la *AB* è parallela alla *ΓΔ* (27).

Dunque *se una retta cadendo*, etc. c. d. d.

29. — *Una retta che cade su due rette parallele fa gli angoli alterni eguali tra loro, l'angolo esterno eguale all'interno ed opposto, e gli angoli interni dalla stessa*

parte eguali a due retti.[37]

Infatti sulle rette parallele *AB*, *ΓΔ* cada la retta *EZ*. Dico che essa fa gli angoli alterni *AHΘ*, *HΘΔ* eguali, e l'angolo esterno *EHB* eguale all'interno ed opposto *HΘΔ*, e gli interni dalla stessa parte *BHΘ*, *HΘΔ* eguali a

37 Come si è già osservato, questa prop. (29) è la prima in cui si adoperi il postulato (P5).

A chi ben consideri l'opera di Euclide, la formulazione del (P5) appare semplice ed elegante (cfr. la nota alla [17]). Per Euclide, due rette tagliate da una terza appaiono come una figura geometrica analoga ad un triangolo (cfr. la nota a [T22], pag. 9).

I geometri di ogni epoca si preoccuparono, di sostituire al (P5) qualche altro, il quale, assieme alle (1)–(28) permettesse di dimostrare la (29) e le seguenti.

Ecco alcune delle proposizioni piú notevoli che sono state proposte per sostituire il (P5).

1. *Due linee rette che si incontrano, non possono essere parallele ad una stessa retta* (Proclo), (È equivalente alla [30] di Euclide).

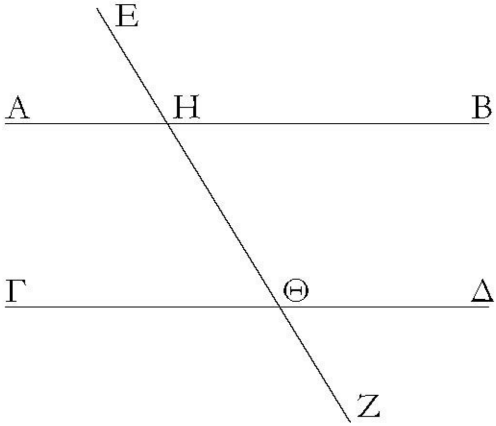
2. *Esiste un triangolo nel quale la somma degli angoli è eguale a due retti* (Legendre, Mém. de l'Acad. des Sc. XII, p. 367: *Réflexions sur différentes manières de demontrer la théorie des paralleles*).

3. *Esistono due triangoli diseguali, aventi gli angoli eguali*. (Saccheri, nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) ovvero nella versione italiana, *L'Euclide emendato del P. Gerolamo Saccheri*, di G. Boccardini, Milano, Hoepli, 1904).

4. *È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualsivoglia area data* (Gauss, lettera a W. Bolyai, 1799).

Una interessante esposizione di questi ed altri metodi si trova nella versione di Euclide di Heath, vol. I pagine 202-220. Cfr. andue retti.

Infatti se *AHΘ* non è eguale a *HΘΔ*, uno di essi è maggiore. Sia maggiore *AHΘ*. Si aggiunga *BHΘ* comune. Allora *AHΘ*, *BHΘ* son maggiori di *BHΘ*, *HΘΔ* (C2). Ma *AHΘ*, *BHΘ* sono eguali a due retti (13), dunque *BHΘ*, *HΘΔ* son minori di due retti. Ma due rette che fanno gli angoli interni minori di due retti, prolungate all'infinito, si incontrano (P5). Dunque *AB*, *ΓΔ* prolungate all'infinito, si incontreranno; ma non si incontrano perché si son supposte parallele: Non è dunque *AHΘ* diseguale a *AHΘ*. È dunque eguale.



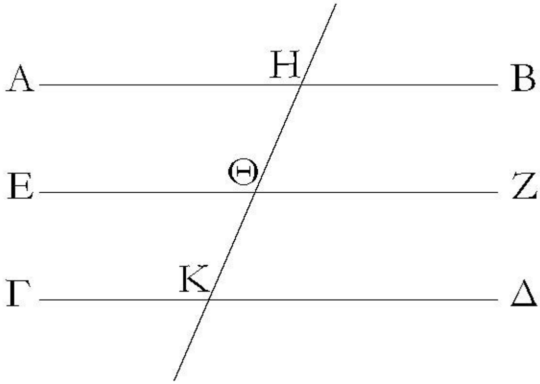
Ma anche *AHΘ* è eguale a *EHB* (15). Dunque *EHB* è eguale a *HΘΔ* (C1). Si aggiunga *BHΘ* comune. Dunque *EHB*, *BHΘ* sono eguali a *BHΘ*, *HΘΔ* (C 2). Ma *EHB*, *BHΘ* sono eguali a due retti (13). Dunque anche *BHΘ*, *HΘΔ* sono eguali a due retti.

Dunque *una retta che cade su due rette parallele*, etc. c. d. d.

30. — *Le parallele ad una stessa retta sono anche*

che la nota alla successiva (32), e Bonola, *La Geometria non Euclidea*, Bologna, Zanichelli, 1903.

parallele tra loro.[38]



Sia ognuna delle *AB*, *ΓΔ* parallela alla *EZ*; dico che la *AB* è parallela alla *ΓΔ*.

Infatti, le incontri la retta *HK*.

Poiché *HK* incontra le rette parallele *AB*, *EZ* l'angolo *AHK* è eguale all'angolo *HΘZ* (29). E poiché ancora *HK* incontra le parallele *EZ*, *ΓΔ*, l'angolo *HΘZ* è eguale all'angolo *HKΔ* (29). Ma si è dimostrato che *AHK* è eguale ad *HΘΔ*; dunque anche *AHK* è eguale a *HKΔ* (C1), e sono alterni.

Dunque *AB* è parallela a *ΓΔ* (27). c. d. d.

---

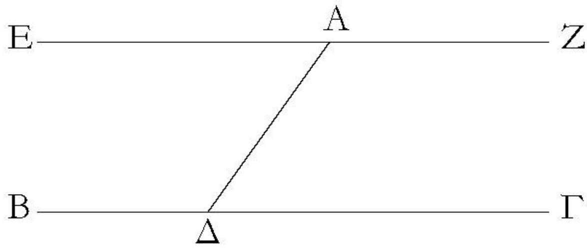
38 Euclide non spiega come si possa costruire la *HK*, la quale incontri le altre tre rette.

La proposizione sembra alterata, o monca, il che può anche sospettarsi dal fatto che essa è priva della solita conclusione. Forse Euclide deduceva dal (P5) che la *HΘ* incontrando la *EZ* doveva anche incontrare la parallela *ΓΔ*? Ovvero preso a caso *H* su *AB*, e *K* su *ΓΔ* osservava che essendo *EZ* interna alle due *AB*, *ΓΔ*, la *HK* doveva necessariamente tagliarla in *Θ*?

A. De Morgan ha osservato (*Compan. to the almanac for* 1849, p. 8 che la (30) è logicamente equivalente all'altra: *Due rette che si tagliano non possono esser parallele entrambe ad un'altra retta*.

31. *Per un punto dato condurre una linea retta parallela ad una retta data.*[39]

Sia *Α* il punto dato, e sia *ΒΓ* la retta data. Si deve dunque per il punto *Α* condurre una linea retta parallela alla retta *ΒΓ*.



Si prenda sulla *ΒΓ* un punto *Δ* a caso, e si congiunga la *ΑΔ*; e sulla retta *ΔΑ* e sul punto *Α* di essa si costruisca l'angolo *ΔΑΕ* eguale all'angolo *ΑΔΓ* (23), e si prolunghi per diritto alla *ΕΑ*, la retta *ΑΖ*.

E poiché la retta *ΑΔ* cadendo sulle due rette *ΒΓ, ΕΖ* fa gli angoli alterni *ΕΑΔ*, *ΑΔΓ* eguali tra loro, dunque la *ΕΑΖ* è parallela alla *ΒΓ* (27).

Dunque dal punto dato *Α*, è stata condotta la linea retta *ΕΑΖ* parallela alla retta data *ΒΓ*. c. d. f.

32. — *In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è eguale ai due interni ed opposti, ed i tre angoli interni al triangolo sono eguali a due retti.*[40]

---

39 PROCLO aveva osservato che Euclide pone il problema (31) soltanto dopo aver dimostrato la (30), dalla quale è facile concludere che da un punto ad una retta si può condurre una sola parallela.

40 Questa proposizione è spesso citata da ARISTOTELE, come

Sia il triangolo $AB\Gamma$ e sì prolunghi un suo lato $B\Gamma$ in Δ. Dico che l'angolo esterno $A\Gamma\Delta$ è eguale ai due interni ed opposti ΓAB, $AB\Gamma$, e che i tre angoli interni del triangolo $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB sono eguali a due retti.

Si conduca infatti dal punto Γ alla AB, la retta parallela ΓE.

---

esempio di una verità accettata da tutti (*Anal. Post*. I, 24, 85 C 5; ibid. 85 C 11; *Metaph.* 1051 a 24). Questo passo della *Metafisica* di Aristotele, come è stato osservato da Heiberg, si riferisce alla dimostrazione qui data da Euclide; quindi non solo la proposizione, ma anche la dimostrazione sono anteriori ad Euclide.

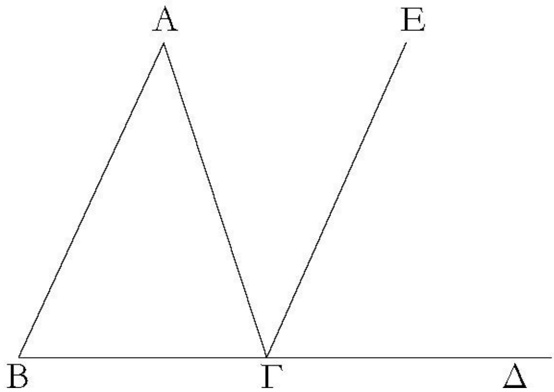
I Pitagorici, secondo quanto riferisce Proclo (p. 379) dimostravano questo teorema conducendo invece dal vertice A una parallela alla base $B\Gamma$, ed osservando che gli altri due angoli cosí formati attorno al vertice sono eguali agli altri due angoli del triangolo perché alterni ed interni etc.

Come Tartaglia osserva nel suo commento a questa proposizione, è facile estenderla ai poligoni semplici, o stellati. Così ad es. *in un pentagono stellato la somma dei cinque angoli A, B, C, D, E è eguale a due angoli retti*. Infatti l'angolo AGF, esterno del triangolo EGC, è eguale ai due interni ed opposti E, C; e l'angolo AFG esterno del triangolo DBF è eguale ai due interni ed opposti B, D, dunque, etc.

Questo pentagono stellato, o *pentagramma* era il segno di riconoscimento dei Pitagorici.

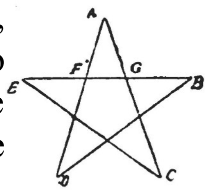
La (32) dipende dalla (29), la quale a sua volta dipende dal postulato (P5). È stato dimostrato nel secolo XIX che se non si ammette la (P5), la (32) non è necessariamente vera, potendosi ai termini *retta, angolo, piano, triangolo,...* dare un senso tale che siano verificate le proposiz. (1)-(28), e non siano invece verificati né la (P5), né la (32). (Beltrami, *Giornale di Matematiche*, Napoli, 1868).

E poiché *AB* è parallela a *ΓE*, e su di esse cade la *AΓ*, gli angoli alterni *BAΓ*, *AΓE* sono eguali tra loro (29). Ancora, poiché *AB* è parallela a *ΓE*, e su di esse cade la *BΔ*, l'angolo esterno *EΓΔ* è eguale all'angolo interno ed



opposto *ABΓ* (29). Ma si era già dimostrato che *AΓE* è eguale a *BAΓ*. Dunque tutto l'angolo *AΓΔ* è eguale ai due interni ed opposti *BAΓ*, *ABΓ* (C2).

Si aggiunga l'angolo comune *AΓB*; allora i due angoli *AΓΔ*, *AΓB* sono eguali ai tre *ABΓ*, *BΓA*, *ΓAB* (C2). Ma i due angoli *AΓΔ*, *AΓB* sono eguali a due retti (13). Dunque anche i tre angoli *AΓB*, *ΓBA*, *ΓAB* sono eguali a due retti (C1).



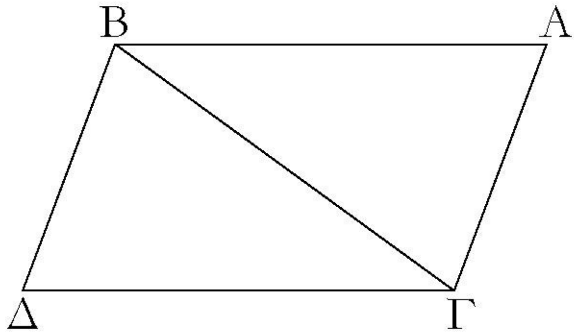
Dunque *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

33. — *Le rette congiungenti dalla stessa parte rette eguali e parallele sono anch'esse eguali e parallele*.[41]

Senza far uso della (P5), ma soltanto delle nozioni precedenti, si giunge appena a dimostrare la (16) e la (17), dalle quali si deduce soltanto che la (32) è *possibile.*

41 Questa proposizione, come Proclo ha osservato, collega la

Siano le *AB*, *ΓΔ* eguali e parallele, e le congiungano dalla stessa parte le *AΓ*, *BΔ*. Dico che anche *AΓ*, *BΔ* sono eguali e parallele.



Si conduca la *BΓ*.

E poiché la *AB* è parallela alla *ΓΔ*, e la *BΓ* le incontra, gli angoli alterni *ABΓ*, *BΓΔ* sono eguali tra loro (29). E poiché *AB* è eguale a *ΓΔ*, e la *BΓ* è comune, le due *AB*, *BΓ* sono eguali alle due *BΓ*, *ΓΔ*; e l'angolo *ABΓ* è eguale all'angolo *BΓΔ*; dunque la base *AΓ* è eguale alla base *BΔ*, ed il triangolo *ABΓ* è eguale al triangolo *BΓΔ*, ed i restanti angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali. Dunque l'angolo *AΓB* è eguale all'angolo *ΓBΔ* (4). E poiché la retta *BΓ* cadendo sulle due rette *AΓ*, *BΔ* fa gli angoli alterni eguali tra loro, è dunque la *AΓ* parallela alla *BΔ* (27). Ma sì è già dimostrato che le è anche eguale.

Dunque, *le rette congiungenti*, etc. c. d. d.

34. — *I lati e gli angoli opposti di uno spazio paral-*

teoria delle parallele con quella dei parallelogrammi. Essa definisce implicitamente che cosa sia un *parallelogrammo.* A partire dalla proposizione successiva, Euclide adopera questa nuova parola senza altri schiarimenti.

lelogrammo son eguali tra loro, e il diametro lo divide per metà.[42]

Sia lo spazio parallelogrammo *ΑΓΔΒ*, ed il suo diametro *ΒΓ*. Dico che i lati e gli angoli opposti del parallelogramma *ΑΓΔΒ* sono eguali tra loro, e che il diametro lo divide per metà.

Poiché infatti la *ΑΒ* è parallela a *ΓΔ*, e la retta *ΒΓ* cade su di esse, gli angoli alterni *ΑΒΓ*, *ΒΓΔ* sono eguali tra lo-

---

42 Euclide avrebbe potuto abbreviare la seconda parte di questa dimostrazione osservando che la (26) citata in principio già permette di concludere l'eguaglianza dei due triangoli *ΑΒΓ*, *ΒΓΔ*. Si osservi però che questa conseguenza si trae dalla dimostrazione, ma non dal solo enunciato della (26). Perciò Euclide forse ha preferito ricorrere alla (4).

Il matematico arabo AN-NAIRĪZĪ, adoperando le (33) e (34), ha dato una elegante costruzione della trisezione di una retta (*Anaritii in decem libros priores elementor. Euclidis comm. ex interpretatione Gherardi cremonensis*, ed. Curtze, Leipzig, Teubner, 1899, p. 74). Egli conduce da parti opposte della retta data *AB* da trisecare, dagli estremi *AB*, due perpendicolari eguali tra loro *AC*, *BD*. Bisecata ognuna di queste nei punti *E*, *F*, congiunge *ED, CF*. I due punti d'intersezione *G*, *H* di queste congiungenti colla *AB*, risolvono il problema.

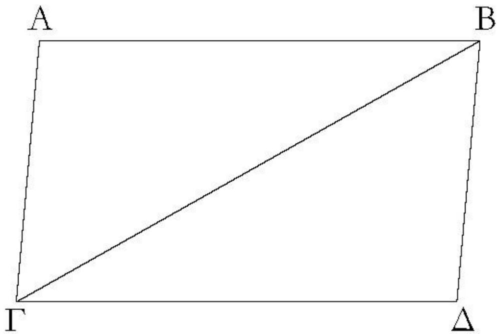
La dimostrazione è facile. Si conduce perciò da *H* la perpendicolare, etc.

Con una costruzione analoga si può dividere una retta in quante si vogliano parti eguali.

E però piú semplice adoperare per la soluzione di questo problema la teoria delle proporzioni. Cosí fa Euclide nella prop. (9) del libro sesto. Cfr. la nota alla (10).

ro (29). E ancora, poiché *ΑΓ* è parallela a *ΒΔ*, e *ΒΓ* cade su di esse, gli angoli alterni *ΑΓΒ*, *ΓΒΔ* sono eguali tra loro (29).

Dunque i due triangoli *ΑΒΓ*, *ΒΓΔ* hanno i due angoli *ΑΒΓ*, *ΒΓΑ* eguali ai due *ΒΓΔ*, *ΓΒΔ* ciascuno a ciascuno,



ed un lato eguale ad un lato, quello tra gli angoli eguali, la *ΒΓ* comune. Perciò anche i restanti lati saranno eguali ai restanti lati, ciascuno a ciascuno, ed il restante angolo, al restante angolo (26). Dunque la *ΑΒ* è eguale alla *ΓΔ*, e la *ΑΓ* a *ΒΔ*, ed ancora l'angolo *ΒΑΓ* eguale a *ΓΔΒ*. Ma poiché l'angolo *ΑΒΓ* è eguale a *ΒΓΔ* e *ΓΒΔ* è eguale a *ΑΓΒ*, è dunque tutto *ΑΒΔ* eguale a tutto *ΑΓΔ* (C2). Ma già si era dimostrato che *ΒΑΓ* è eguale a *ΓΔΒ*.

Dunque i lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo sono eguali tra loro.

Dico poi, che un diametro lo divide per metà. Poiché infatti *ΑΒ* è eguale a *ΓΔ*, e *ΒΓ* è comune, le due *ΑΒ*, *ΒΓ* sono eguali alle due *ΓΔ*, *ΒΓ* ciascuna a ciascuna, e l'angolo *ΑΒΓ* è eguale all'angolo *ΒΓΔ* (29). Dunque il triangolo *ΑΒΓ* è eguale al triangolo *ΒΓΔ* (4).

Dunque il diametro *ΒΓ* divide per metà il parallelogrammo *ΑΒΓΔ*, c. d. d.

35. — *I parallelogrammi sulla stessa base e nelle stesse parallele, sono eguali tra loro*.[43]

Siano i parallelogrammi $AB\Gamma\Delta$, $EB\Gamma Z$ su la stessa base e nelle stesse parallele AZ, $B\Gamma$.

Dico che $AB\Gamma\Delta$ è uguale al parallelogrammo $EB\Gamma\Delta$.

---

43 Euclide sviluppa soltanto il caso piú complicato. Ma il punto E potrebbe cadere su Δ o nella $A\Delta$.

Le dimostrazioni, in questi due casi, già svolte da PROCLO, si ottengono da quella data da Euclide, con alcune lievi semplificazioni.

Si noti che in questa proposizione (35) compare per la prima volta la parola *eguale* usata in un nuovo senso.

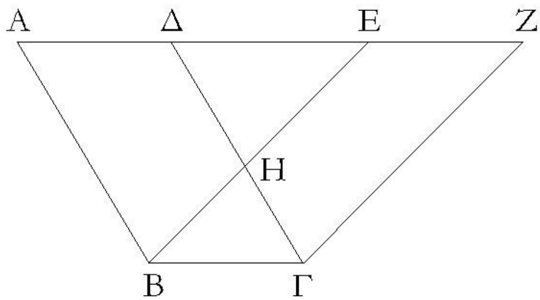
Volendo evitare l'ambiguità, gli scrittori moderni hanno proposto, e sembra questa la via preferibile, di introdurre un nuovo concetto astratto, il concetto di *area*, dicendo cioè che i due parallelogrammi *hanno eguale area*, o *sono eguali in area*.

LEGENDRE invece nella sua *Géométrie* (quatrième édition, Paris, 1802, note I p. 274) propone di chiamar *equivalenti* i due parallelogrammi. Questa denominazione spesso seguita in trattati moderni; ha l'inconveniente di moltiplicare eccessivamente le proposizioni. Bisogna in tal caso ripetere per enti *equivalenti* le nozioni comuni (C1), (C2), (C3). Ed anche cessa in qualche caso la validità della (C2), poiché a triangoli eguali aggiungendo triangoli eguali si possono ottenere parallelogrammi non piú *eguali* ma appena *equivalenti.*

Si noti infine che nella dimostrazione della (35) non occorre l'uso della (C3) quando E cade tra A e Δ, ma basta la sola (C2).

È stato dimostrato che si può sempre ricondursi a questo caso, ed essere sufficiente l'uso della (C2) (la quale afferma che aggiungendo aree eguali ad aree eguali si hanno aree eguali), *purché si introduca* un postulato (formulato da ARCHIMEDE, *Quadra-*

Poiché infatti $AB\Gamma\Delta$ è un parallelogrammo, $A\Delta$ è uguale a $B\Gamma$ (34). E per la stessa ragione anche EZ è eguale a $B\Gamma$. Quindi anche $A\Delta$ è eguale a EZ (C1). Ed ancora la ΔE è comune; dunque tutta la AE è eguale a tutta la ΔZ (C2). Ma ancora, AB è eguale a $\Delta\Gamma$ (34); dunque le due EA, AB sono eguali alle due $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $Z\Delta\Gamma$ è eguale all'angolo EAB, l'esterno all'interno (29). Dunque la base EB è eguale alla base ΓZ, ed il triangolo EAB sarà an-



tura della parabola II ed. Heiberg vol. 2 p. 265), di cui Euclide non fa uso, il quale dice in sostanza che date due aree diseguali si può trovare un numero n tale, che n volte la minore superi la maggiore.

Si è costruita cosí una teoria dell'*equivalenza*, od *eguaglianza addittiva* delle aree delle figure piane, per opera di W. Bolyai, Duhamel, De Zolt,... Essa è adoperata in varii trattati scolastici italiani moderni.

Si veda per una esposizione completa, l'articolo di U. Amaldi, *Sulla teoria dell'equivalenza*, nelle *Questioni riguardanti la Geometria Elementare*, Bologna, II ed. 1910.

Questa teoria è senza dubbio interessante ed elegante. Essa però sembra assai piú artificiosa di quella Euclidea, non essendovi ragione per non introdurre nell'insegnamento fin da principio anche la nozione comune (C 3).

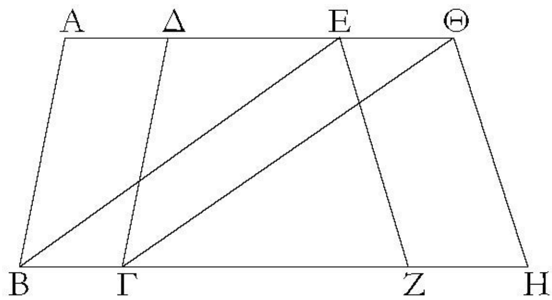
Euclide l'adopera fin da principio; cfr. le prop. (2), (5)...

che eguale al triangolo *ΔZΓ* (4).

Si tolga *ΔHE*, comune. Dunque il restante trapezio *ABHΔ* è eguale al restante trapezio *EHΓZ* (C3). Si aggiunga il triangolo *HBΓ*, comune. Dunque tutto il parallelogrammo *ABΓΔ* è eguale a tutto il parallelogrammo *EBΓZ*.

Dunque, *i parallelogrammi sulla stessa base*, etc. c. d. d.

36. — *Parallelogrammi su basi eguali e nelle stesse parallele sono eguali tra loro*.



Siano i parallelogrammi *ABΓΔ*, *EZHΘ* su le basi eguali *BΓ*, *ZH* e nelle stesse parallele *AΘ*, *BH*. Dico che il parallelogramma *ABΓΔ* è eguale a *EZHΘ*.

Si conducano infatti *BE*, *ΓΘ*. Poiché *BΓ* è eguale a *ZH* e *ZH* è eguale ad *EΘ*, anche *BΓ* è eguale a *EΘ* (C1). Ma esse sono anche parallele, e le *EB*, *ΘΓ* le congiungono. Ma le congiungenti dalla stessa parte di rette eguali e parallele sono anch'esse parallele (33). Perciò *EBΓΘ* è un parallelogramma (34), ed esso ancora eguale a *ABΓΔ*, poiché hanno la stessa base *BΓ* e sono nelle stesse parallele (35), *BΓ*, *AΘ*. Per la stessa ragione *EZHΘ* è eguale allo stesso *EBΓΘ*. Perciò anche il parallelogrammo

ΑΒΓΔ è eguale a *ΕΖΗΘ* (C1).

Dunque *parallelogrammi su basi eguali* etc. c. d. d.

37. — *Triangoli che sono sulla stessa base e nelle stesse parallele sono eguali tra loro*.[44]

Siano i triangoli *ΑΒΓ*, *ΔΒΓ* sulla stessa base *ΒΓ* e nelle stesse parallele *ΑΔ*, *ΒΓ*. Dico che il triangolo *ΑΒΓ* è eguale al triangolo *ΔΒΓ*.

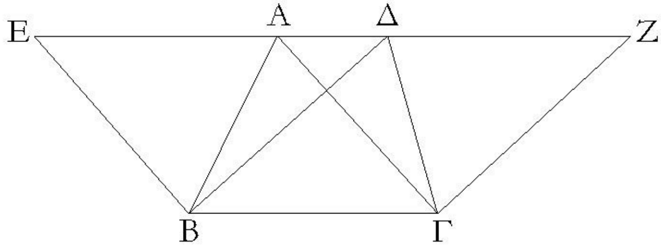
---

44 Questa proposizione e la precedente mostrano come due figure piane possono aver la stessa area, senza aver lo stesso perimetro.

Il credere che il perimetro possa dare un'idea dell'area di una superficie, sembra esser stato un errore comune tra gli antichi scrittori ignari di matematica. TUCIDIDE, VI, 1, stima l'area della Sicilia dal tempo occorrente a navigarle intorno. PLINIO, VI, 208, per confrontare le diverse parti del mondo dice: «aptissime.... spectabitur ad longitudinem latitudine addita». QUINTILIANO, *Institutiones oratoriae*, I, cap. X, 39-52, dice: «*De Geometria*.... Falsa quoque veris similia geometria ratione deprehendit... Nan quis non ita proponenti credat: Quorum locorum estremae lineae eandem mensuram colligunt, eorumque spatio quoque, quod his lineis continetur par sit necesse est? At id falsum est. Nam plurimum refert cuius formae sit ille circuitus; reprehensique a geometris sunt historici, quia magnitudinem insularum satis significari navigationis ambitu crediderunt». QUINTILIANO enuncia poi correttamente vari teoremi geometrici, ricordando che il circolo è la figura piana di area massima, tra quelle aventi lo stesso perimetro, e ricorre, per convincere i non geometri, ad un esempio numerico osservando che un quadrato avente per lato 10 passi ed i rettangoli aventi per lati 15×5, ovvero 19×1 passi, hanno lo stesso perimetro, ma l'area assai diversa.

Si prolunghi *ΑΔ* da ognuna delle due parti, verso *E, Z*; da *B* si conduca la *BE* parallela alla *ΓA*, e da *Γ* si conduca la *ΓZ* parallela alla *BΔ* (31).

Dunque *EBΓA*, *ΔBΓZ* sono entrambi parallelogrammi, e sono eguali, poiché sono sulla stessa base *BΓ* e nelle stesse parallele *BΓ*, *EZ* (35). Ed ancora il triangolo *ABΓ* è la metà del parallelogramma *EBΓA*, poiché il diametro *AB* divide questo per metà (34). Poi anche il triangolo *ΔBΓ* è la metà del parallelogramma *ΔBZΓ* poiché anche il diametro *ΔΓ* lo divide in due parti eguali. Dunque il triangolo *ABΓ* è eguale al triangolo *ΔBΓ*.



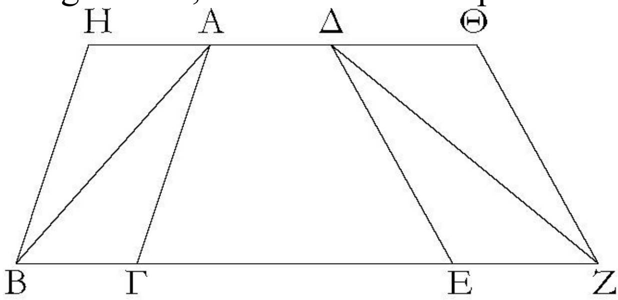
Dunque *triangoli che sono sulla stessa base* etc. c. d. d.

38. — *Triangoli che sono su basi eguali e nelle stesse parallele sono eguali tra loro*.

Siano i triangoli *ABΓ*, *ΔEZ* sulle basi eguali *BΓ*, *EZ* e nelle stesse parallele *BZ*, *AΔ*. Dico che il triangolo *ABΓ* è eguale al triangolo *ΔEZ*.

Si prolunghi infatti *AΔ* da ognuna delle due parti verso *H, Θ* e per *B* si conduca alla *ΓA* la parallela *BH*, e per *Z* alla *ΔE* la parallela *ZΘ* (31).

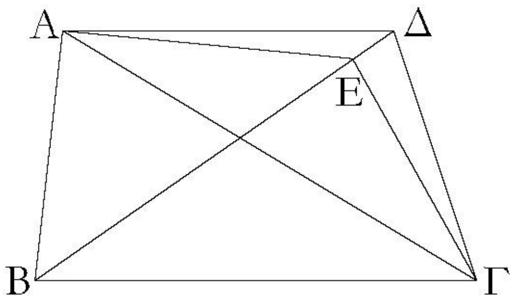
Ognuno dei due *HBΓA*, *ΔEZΘ* è dunque un parallelogrammo. Ed è *HBΓA* eguale a *ΔEZΘ*. Poiché sono su basi eguali *BΓ*, *EZ* e nelle stesse parallele *BZ*, *HΘ* (36).



Ma il triangolo *ABΓ* è metà del parallelogrammo *HBΓA*; infatti il diametro *AB* lo divide per metà (34). Ed il triangolo *ZEΔ* è metà del parallelogrammo *ΔEZΘ*; infatti il diametro *ΔZ* lo divide per metà (34). Dunque il triangolo *ABΓ* è eguale al triangolo *ΔEZ*.

Dunque, *i triangoli che sono su basi eguali*, etc., c. d. d.

39. — *Triangoli eguali che sono sulla stessa base e dalla stessa parte, sono anche nelle stesse parallele*.



Siano i triangoli eguali *ABΓ*, *ΔBΓ* sulla stessa base *BΓ*, e dalla stessa parte di *BΓ*. Dico che sono anche nelle stesse parallele.

Si conduca infatti la *AΔ*. Dico che *AΔ* è parallela alla *BΓ*.

Se infatti non è, si conduca per il punto *A* alla retta *ΒΓ* la parallela *ΑΕ* (31), e si congiunga la *ΕΓ*. Allora il triangolo *ΑΒΓ* è eguale al triangolo *ΕΒΓ*, poiché è sulla stessa base *ΒΓ* di esso, e nelle stesse parallele (37). Ma *ΑΒΓ* è eguale *ΔΒΓ*; dunque anche *ΔΒΓ* è eguale a *ΕΒΓ* (C1), il maggiore al minore, il che è impossibile. Dunque *ΑΕ* non è parallela a *ΒΓ*. Similmente dimostreremo che nessun'altra eccetto *ΑΔ* è parallela. Dunque *ΑΔ* è parallela a *ΒΓ*.

Dunque, *triangoli eguali*, etc. c. d. d.

40. — [*Triangoli eguali su basi eguali e dalla stessa parte sono anche nelle stesse parallele*].[45]

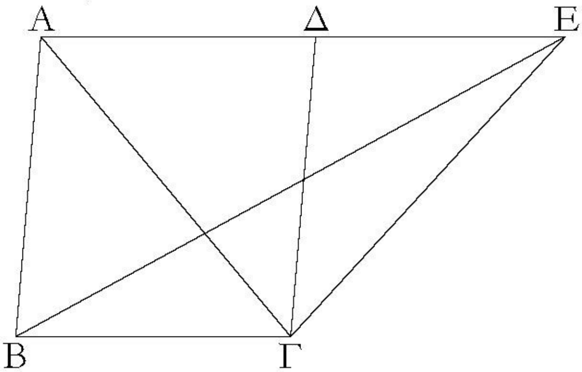
41. — *Se un parallelogrammo ha la stessa base di un triangolo, ed è nelle stesse parallele, il parallelogrammo è doppio del triangolo*.

Abbia infatti il parallelogrammo *ΑΒΓΔ* la stessa base *ΒΓ* del triangolo *ΕΒΓ* e sia nelle stesse parallele *ΒΓ*, *ΑΕ*. Dico che il parallelogrammo *ΑΒΓΔ* è doppio del triangolo *ΒΕΓ*.

---

45 Questa proposizione non si trovava nel testo originario, ed è stata aggiunta da qualche commentatore. Così ha provato Heiberg (*Hermes*, XXXVIII, 1903, p. 50) adoperando un papiro scoperto al Fayum (*Fayūm Towns and their papyri*, p. 96 n. IX).

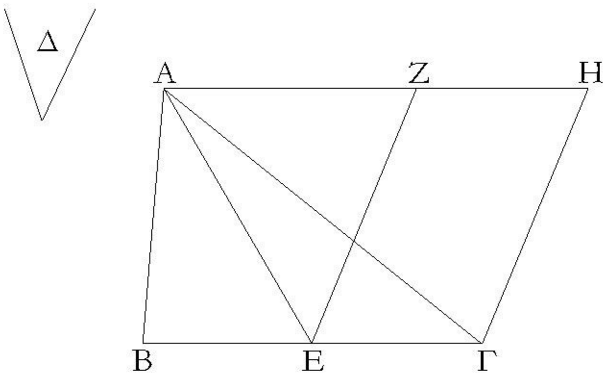
È da notarsi che il Tartaglia nella sua bella edizione di Euclide sente il bisogno di modificare la dimostrazione. La dimostrazione si conduce come quella della (39). La (40) non ha nessun uso nel seguito degli Elementi.



Si conduca infatti la *ΔΓ*. Il triangolo *ΑΒΓ* è allora eguale al triangolo *ΕΒΓ*; poiché essi sono sulla stessa base *ΒΓ* e nelle stesse parallele *ΒΓ*, *ΑΕ* (37). Ma il parallelogrammo *ΑΒΓΔ* è doppio del triangolo *ΑΒΓ*, poiché il diametro *ΑΓ* lo divide per metà (34). Dunque anche il parallelogrammo *ΑΒΓΔ* è doppio del triangolo *ΕΒΓ*.

Dunque, *se un parallelogrammo*, etc. c. d. d.

42. — *Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo eguale ad un dato triangolo*.



Sia *ΑΒΓ* il triangolo dato, e *Δ* l'angolo rettilineo dato. Si deve allora costruire nell'angolo *Δ* un parallelogrammo eguale al triangolo *ΑΒΓ*.

Si divida la *ΒΓ* per metà in *Ε* (10), e si conduca la *ΑΕ*, e sulla retta *ΕΓ* nel punto *Ε* di essa si costruisca l'angolo *ΖΕΓ* eguale all'angolo *Δ* (23), e per *Α* si conduca la *ΑΗ* parallela ad *ΕΓ* (31), e per *Γ* la *ΓΗ* parallela ad *ΕΖ*. Dunque *ΖΕΓΗ* è un parallelogrammo. E poiché *ΒΕ* è eguale ad *ΕΓ*, il triangolo *ΑΒΕ* è eguale al triangolo *ΑΕΓ*, poiché sono su basi eguali *ΒΕ*, *ΕΓ* e tra le stesse parallele *ΒΓ ΑΗ* (38). Dunque il triangolo *ΑΒΓ* è doppio del triangolo *ΑΕΓ*. Ma anche il parallelogrammo *ΖΕΓΗ* è doppio del triangolo *ΑΕΓ*, perché ha la stessa base ed è nelle stesse parallele (41).

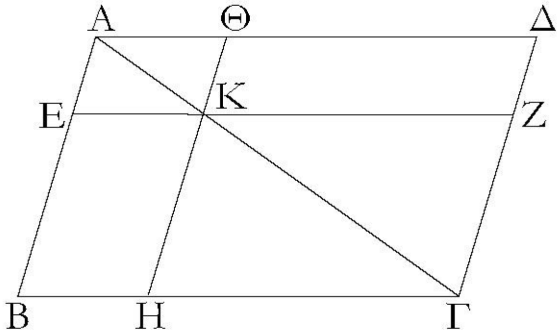
Dunque il parallelogrammo *ΖΕΓΗ* è eguale al triangolo *ΑΒΓ* ed ha l'angolo *ΓΕΖ* eguale all'angolo dato *Δ*.

Dunque si è costruito nell'angolo *ΓΕΖ*, che è eguale all'angolo *Δ*, il parallelogrammo *ΖΕΓΗ*, eguale al triangolo dato *ΑΒΓ* c. d. f.

43. — *In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi intorno al diametro sono eguali tra loro*.

Sia il parallelogrammo *ΑΒΓΔ* e il diametro di esso *ΑΓ*, e intorno alla diagonale *ΑΓ* siano i parallelogrammi *ΕΘ*, *ΗΖ*. E siano *ΒΚ*, *ΚΔ* quelli che si chiamano *complementi.* Dico che il complemento *ΒΚ* è eguale al complemento *ΚΔ*.

Poiché infatti *ΑΒΓΔ* è un parallelogrammo, ed *ΑΓ* un diametro di esso, il triangolo *ΑΒΓ* è eguale al triangolo *ΑΓΔ* (34). Ed ancora, poiché *ΕΘ* è un parallelogrammo, e un diametro di esso è *AK*, il triangolo *AEK* è eguale al triangolo *AΘK*. E per la stessa ragione anche il triangolo *KZΓ* è eguale al triangolo *KHΓ* (34). Poiché dunque il triangolo *AEK* è eguale al triangolo *AΘK*, e *KZΓ* a *KHΓ*, il triangolo *AEK* col triangolo *KHΓ*, è eguale al triangolo *AΘK* col triangolo *KZΓ* (C2).



Ma tutto il triangolo *ABΓ* è eguale a tutto *AΔΓ*. Dunque il resto, il complemento *BK*, è eguale al resto, il complemento *KΔ* (C3).

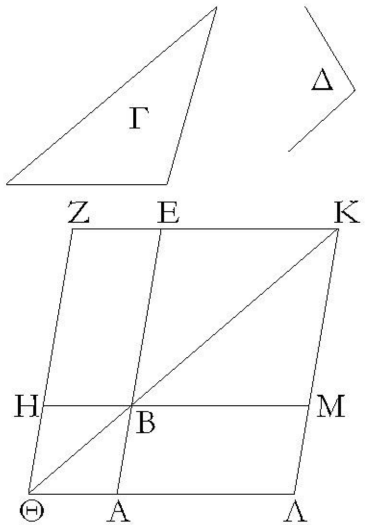
Dunque, *in ogni parallelogrammo*, etc. c. d. d.

44. — *Ad una retta data, in un angolo rettilineo dato, applicare un parallelogrammo eguale ad un triangolo dato*.

Sia *AB* la retta data, *Γ* il triangolo dato e *Δ* l'angolo rettilineo dato. Si deve allora alla retta data *AB*, in un angolo eguale a *Δ*, applicare un parallelogrammo eguale al triangolo *Γ*.

Si costruisca il parallelogrammo *BEZH* eguale al triangolo *Γ*, nell'angolo *EBH*, il quale sia eguale all'angolo *Δ* (42); e si ponga in modo che la *BE* sia per diritto alla *AB*; e si prolunghi la *ZH* in *Θ*, e per *A* si conduca la

AΘ parallela ad ognuna delle due *BH*, *EZ* (31), e sì conduca la *ΘB*. Poiché la *ΘZ* cade sulle due parallele *AΘ*, *EZ*, gli angoli *AΘZ* , *ΘZE* sono eguali a due retti (29); perciò gli angoli *BΘH*, *HZE* son minori di due retti. Ma due rette [le quali incontrate da una terza] fanno gli angoli [interni e dalla stessa parte] minori di due retti, prolungate all'infinito si incontrano (P5). Dunque le *ΘB*, *ZE* prolungate sì incontreranno.



Si prolunghino, e si incontrino in *K*, e per *K* si conduca la *KA* parallela ad entrambe le *EA*, *ZΘ* e si prolunghino le *ΘA*, *HB* fino ai punti, *Λ*, *M*.

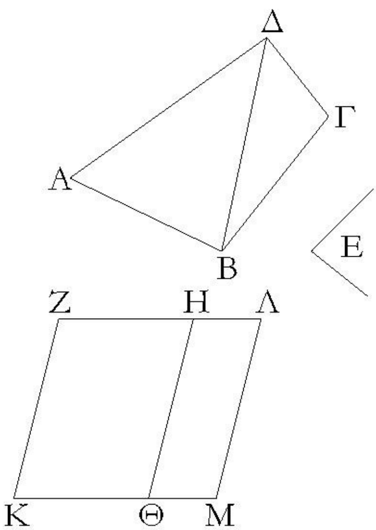
Dunque *ΘΛKZ* è un parallelogrammo, *ΘK* un suo diametro, e intorno a *ΘK* i parallelogrammi *AH*, *ME*, e quelli che si chiamano *complementi,* *AB*, *BZ*. Dunque *ΛB* è eguale a *BZ* (48).

Ma *BZ* è eguale al triangolo *Γ* dunque anche *ΛB* è eguale a *Γ* (C1). E poiché l'angolo *HBE* è eguale a *ABM* (15), e *HBE* è eguale a *Δ*, dunque anche *ABM* è eguale all'angolo *Δ*.

Dunque alla retta data *AB*, nell'angolo *ABM* che è eguale a *Δ*, è stato applicato il parallelogrammo *AB*, eguale al triangolo Γ c. d. f.

45. — *Costruire un parallelogrammo eguale ad una data figura rettilinea, in un angolo rettilineo dato*.[46]

Sia $AB\Gamma\Delta$ la figura rettilinea data, e sia E l'angolo rettilineo dato. Si deve allora costruire un parallelogrammo, nel dato angolo E eguale alla figura rettilinea $AB\Gamma\Delta$.



Si conduca la ΔB, e si costruisca un parallelogrammo $Z\Theta$ nell'angolo ΘKZ che sia eguale all'angolo E (42).

E alla retta $H\Theta$ si applichi il parallelogrammo HM nell'angolo $H\Theta M$ che sia eguale all'angolo E (44).[47]

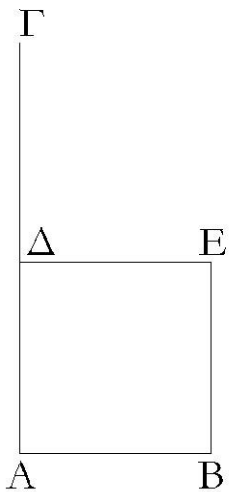
E poiché l'angolo E è eguale ad ognuno dei due ΘKZ, $H\Theta M$, anche ΘKZ è eguale a $H\Theta M$. Si aggiunge $K\Theta H$, comune. Dunque

46 Le proposizioni (42), (44), (45) risolvono tre problemi (ciascuno dei quali è piú generale del precedente), relativi alla *trasformazione delle figure piane*. La (45) insegna a trasformare una qualunque figura rettilinea (poligono), in un parallelogrammo, avente un angolo dato ed una base data. Si possono quindi cosí trovare la somma o la differenza di due figure piane.

Soltanto nella (14) del libro II, Euclide insegnerà a trasformare un rettangolo, ovvero una qualunque figura piana in un quadrato.

47 Così il testo nella traduzione del Vacca. Per una più com-

ZKΘ, *KΘH* sono eguali a *KΘH*, *HΘM* (C2). Ma *ZKΘ*, *KΘH* sono eguali a due retti (29), dunque anche *KΘH*, *HΘM* sono eguali a due retti (C1). Dunque ad una retta *HΘ* ed al punto *Θ* di essa, le due rette *KΘ*, *ΘM*, non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti; dunque *KΘ* è per diritto alla *ΘM* (14). E poiché la retta *ΘH* cade sulle due parallele *KM*, *ZH*, gli angoli alterni *MΘH*, *ΘHZ* sono eguali tra loro (29). Si aggiunga *ΘHΛ* comune, Allora *MΘH*, *ΘHΛ* sono eguali a *ΘHZ*, *ΘHΛ*. Ma *MΘH*, *ΘHΛ* sono eguali a due retti (29). Dunque anche *ΘHZ*, *ΘHΛ* sono eguali a due retti. Dunque la *ZH* è per diritto alla *HΛ* (14). E poiché *ZK* è eguale e parallela a *ΘH* (34), ed anche *ΘH* ad *MΛ*, anche la *KZ* è eguale e parallela alla *MΛ*. E le congiungono le rette *KM*, *ZΛ*. Dunque anche le *KM*, *ZΛ* sono eguali e parallele (30). Dunque *KZΛM* è un parallelogrammo. E poiché il triangolo *ABΔ* è eguale al parallelogrammo *ZΘ*, e *ΔBΓ* è eguale a *HM*, dunque tutta la figura rettilinea *ABΓΔ* è egua-



pleta traduzione del testo greco si dovrebbe leggere "Si conduca la *ΔB*, e si costruisca un parallelogrammo *ZΘ* eguale al triangolo *ABΔ* nell'angolo *ΘKZ* che sia eguale all'angolo *E* (42). E alla retta *HΘ* si applichi il parallelogrammo *HM* eguale al triangolo *ΔBΓ* nell'angolo *HΘM* che sia eguale all'angolo *E* [Nota per l'edizione digitale *Manuzio*].

le al parallelogrammo *KZΛM*.

Dunque nell'angolo *ZKM* , che è eguale all'angolo dato *E*, si è costruito il parallelogrammo *KZΛM* eguale alla data figura rettilinea *ΑΒΓΔ*; c. d. f.

46. — *Su una retta data descrivere un quadrato*.[48]

Sia *AB* la retta data; si deve allora sulla retta *AB* descrivere un quadrato.

Si conduca alla retta *AB*, dal punto *A* su di essa la *AΓ* ad angolo retto (11),e si ponga *AΔ* eguale alla *AB*. E per il punto *Δ* si conduca la *ΔE* parallela alla *AB*, e dal punto *B* la *BE* parallela alla *AΔ* (31).

Dunque *AΔEB* è un parallelogramma, quindi la *AB* è eguale alla *ΔE*, e la *AΔ* alla *BE* (34); ma *AB* è eguale alla *AΔ*; dunque le quattro *BA*, *AΔ*, *ΔE*, *EB* sono eguali tra loro (C1); dunque il parallelogramma *AΔEB* è equilatero.

Dico che è anche rettangolo. Poiché infatti la retta *AΔ* cade sulle parallele *AB*, *ΔE*, i due angoli *BAΔ*, *AΔE* sono eguali a due retti (29). Ma *BAΔ* è retto, dunque lo è anche *AΔE*. Ma in uno spazio parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono eguali tra loro (34). Dunque son retti ognuno degli angoli opposti *ABE*, *BEΔ*.

48 Nella (1) Euclide aveva insegnato a costruire un triangolo equilatero.

Nelle (11), (15), (16), del libro quarto insegnerà a costruire un pentagono regolare, un esagono regolare, ed un pentadecagono regolare.

Dunque $A\Delta EB$ è rettangolo. E già si è dimostrato che è equilatero. Dunque è un quadrato (T22), ed è descritto sulla retta AB.

47. — *Nei triangoli rettangoli, il quadrato del lato che sottende l'angolo retto, è eguale ai quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto*.[49]

---

49 PROCLO osserva che la tradizione attribuisce questo teorema a PITAGORA, il quale avrebbe sacrificato un bue agli Dei per questa scoperta.

PLUTARCO (*Non posse suaviter vivi secundum Epicurum* c. 11), DIOGENE LAERZIO (VIII, 12) ed ATENEO (X, 13) son concordi nell'attribuire a Pitagora questa proposizione.

Essa è però forse, assai piú antica almeno in un caso semplice, quello in cui i cateti del triangolo rettangolo sono 3, 4 e quindi l'ipotenusa 5.

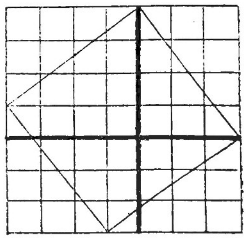
In un frammento di papiro della XII dinastia egiziana, scoperto a Kahun, M. CANTOR (*Archiv. d. Math. u. Phys.*, VIII. 1905, p. 66) ha trovato l'eguaglianza $3^2+2^2=5^2$ scritta in varî modi.

Forse anche gli antichi Babilonesi conoscevano questo risultato, sebbene esso non sia ancora stato ritrovato esplicitamente nei documenti pervenuti fino a noi. (Cfr. M. CANTOR, *Gesch. d. Math.*, III, ed., 1907, p. 49, 50).

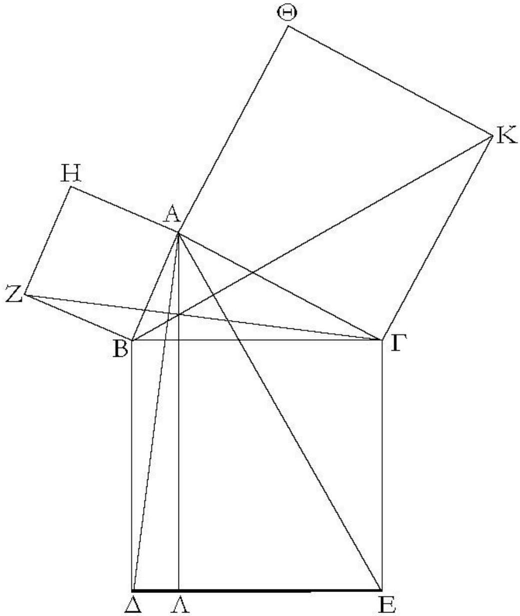
Infine anche l'antico astronomo ed astrologo cinese il Duca CHÓU (pronuncia *Cióu*), zio del re WU (1100 av. Cr.), si servì della eguaglianza $3^2+2^2=5^2$, che dimostrò per mezzo di questa semplice figura (osservando cioè che il quadrato dell'ipotenusa si ottiene togliendo dal quadrato circoscritto 49, i quattro triangoli rettangoli esterni, ovvero due rettangoli 3×4, ossia 49–24=25), e si serví di questo risultato per costruire un angolo retto.

E cosí si fa oggi ancor talvolta in agrimensura, o in topografia quando non si possieda uno strumento piú preciso. Si costruisce

Sia il triangolo rettangolo *ΑΒΓ* avente l'angolo retto *ΒΑΓ*. Dico che il quadrato di *ΒΓ* è eguale ai quadrati di *ΒΑ*, *ΑΓ*.



Si costruisca infatti su *ΒΓ* il quadrato *ΒΔΕΓ*, e su *ΒΑ*, *ΑΓ*, i quadrati *ΗΒ*, *ΘΓ* (46), e per *Α* si conduca la *ΑΛ* parallela ad ognuna delle due *ΒΔ*, *ΓΕ* (31); e si congiungano le *ΑΔ*, *ΖΓ*.



E poiché ognuno dei due angoli *ΒΑΓ*, *ΒΑΗ* è retto, dunque con una retta *ΒΑ*, e nel punto *Α* di essa, le due rette *ΑΓ*, *ΑΗ*, non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti (14). Dunque *ΓΑ* è

---

con un filo teso e ripiegato, un triangolo di lati, 3, 4, 5, e si ha così un angolo retto (48).

Di questo teorema che si chiama ordinariamente di *Pitagora* son state date interessanti ed assai varie dimostrazioni.

Son notevoli tra le altre, una di Pappo (IV, p. 177), una dell'arabo Thabit ibn Qurra (826-901 d. Cr.), una trovata nei mss. di Leonardo da Vinci (1452-1519). Cfr. Heath, vol. 1 p. 364-368.

per diritto alla *AH*. E per la stessa ragione *BA* è per diritto alla *AΘ*.

E poiché l'angolo *ABΓ* è eguale all'angolo *ZBA*, perché ognuno di essi è retto, si aggiunga *ABΓ*, comune. Allora tutto *ΔBA* è eguale a tutto *ZBΓ* (C2).

E poiché *ΔB* è eguale a *BΓ* e *ZB* a *BA* (T22) dunque le due *ΔB*, *BA* sono eguali alle due *ZB*, *BΓ*, ciascuna a ciascuna e l'angolo *ΔBA* è eguale all'angolo *ZBΓ*. Allora la base *AΔ* è eguale alla base *ZΓ*, ed il triangolo *ABΔ* è eguale al triangolo *ZBΓ* (4).

E il parallelogrammo *BΛ* è doppio del triangolo *ABΔ*, poiché hanno la stessa base *BΔ* e sono nelle stesse parallele *BΔ*, *AΛ* (41). Ed ancora, il quadrato *HB* è doppio del triangolo *ZBΓ*, poiché hanno la stessa base *ZB* e sono nelle stesse parallele *ZB*, *HΓ* (41). Dunque il parallelogrammo *BΛ* è eguale al quadrato *HB*.

Similmente, congiunte le *AE*, *BK*, si dimostrerà che anche il parallelogrammo *ΓΛ* è eguale al quadrato *ΘΓ*.

Dunque tutto il quadrato *BΔEΓ* è eguale ai due quadrati *HB*, *ΘΓ* (C2). Ed il quadrato *BΔEΓ* è costruito su *BΓ* ed i quadrati *HB*, *ΘΓ* su le *BA*, *AΓ*. Dunque il quadrato del lato *BΓ* è eguale ai quadrati dei lati *BA*, *AΓ*.

Dunque, *nei triangoli rettangoli*, etc. c. d. d.

48. — *Se in un triangolo il quadrato di un lato è eguale ai quadrati dei due restanti lati del triangolo, l'angolo compreso dai due restanti lati del triangolo è*

retto.[50]

Infatti nel triangolo $AB\Gamma$ sia il quadrato del lato $B\Gamma$ eguale ai quadrati dei lati BA, $A\Gamma$. Dico che l'angolo $BA\Gamma$ è retto.

Si conduca infatti dal punto A la retta $A\Delta$ ad angolo retto alla $A\Gamma$ (11) e si ponga la $A\Delta$ eguale alla BA, e si congiunga la $\Delta\Gamma$.

Poiché la ΔA è eguale alla AB, il quadrato della ΔA è eguale al quadrato della AB. Si aggiunga il quadrato della $A\Gamma$ comune. I quadrati di ΔA, $A\Gamma$ sono dunque eguali ai quadrati di BA, $A\Gamma$ (C2). Ma il quadrato di $\Delta\Gamma$ è eguale ai quadrati di ΔA, $A\Gamma$, infatti l'angolo $\Delta A\Gamma$ è retto (47); ed il quadrato di $B\Gamma$ è eguale ai quadrati di BA, $A\Gamma$,

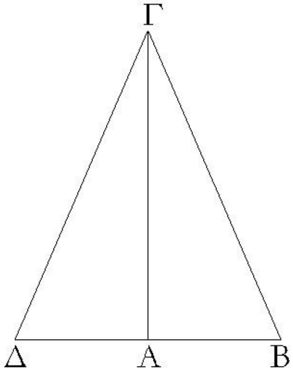
---

50 In questa dimostrazione EUCLIDE ammette che: *se due quadrati sono eguali, sono eguali anche le loro basi*. Già PROCLO aveva sentito il bisogno di dimostrare questa proposizione, e la sua inversa, e piú recentemente DE MORGAN (*Companion to the Almanac for* 1849, p. 8) aveva pure proposto di introdurle dopo la (46).

Ma la verità della inversa, cioè: *sono eguali i quadrati costruiti su basi eguali* si deduce colla semplice applicazione di un principio logico il quale dice che: *se su due enti eguali si eseguisce la stessa operazione, i risultati sono eguali* (cfr. PEANO, *Aritmetica* etc. p. 49).

La proposizione diretta si dimostra subito osservando che se due rette sono diseguali, i quadrati costruiti su di esse sono diseguali, e quindi con una semplice regola di logica (enunciata nella nota alla (18), p. 50) si deduce la proposizione. Queste osservazioni possono spiegare perché Euclide non abbia creduto opportuno enunciare esplicitamente le due proposizioni.

ciò infatti si è supposto. Dunque anche il quadrato di *ΔΓ*



è eguale al quadrato di *BΓ* (C 1), perciò anche la *ΔΓ* è eguale alla *BΓ*. Ma poiché anche la *ΔA* è eguale alla *AB*, e la *AΓ* è comune, le due *ΔA*, *AΓ* sono eguali alle due *BA*, *AΓ* e la base *ΔΓ* è eguale alla base *BΓ*; dunque l'angolo *ΔAΓ* è eguale all'angolo *BAΓ* (8). Ma *ΔAΓ* è retto, dunque anche *BAΓ* è retto.

Se dunque, *in un triangolo*, etc. c. d. d.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
Α

α´
Ὅροι

α´. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

β´. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ´. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ´. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε´. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ς´. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ´. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η´. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

ϑ´. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι´. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

ια΄. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ΄. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ΄. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ΄. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε΄. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, πρὸς ἣν ἀφ᾽ ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ις΄. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη΄. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ᾽ αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

ιθ΄. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κ΄. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα΄ Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβ´. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

κγ´. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Αἰτήματα.

α´. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν·

β´. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐθείας ἐκβαλεῖν·

γ´. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι·

δ´. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι·

ε´. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοιναὶ ἔννοιαι.

α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

γ΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

δ΄. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἀλλήλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

ε΄. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν.

α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ᾽ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπί τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστιν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β΄.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπί τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ᾿ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ᾿ εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἐστίν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστιν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

δ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην. λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ε΄.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τη ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· καὶ εἰσὶ πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· αἵ εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ς΄.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δὺο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζʹ.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ.

ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϑ΄.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ι΄

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ᾽ αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια΄.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ᾽ αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ. λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ΄.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, τὸ Γ. δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιγ΄.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ. λὲγω, ὅτι αἱ ὑπὸ

ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιδ΄.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν. λέγω ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιε΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον. λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιϛ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λὲγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὴ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιζ΄.

Παντὸνς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸνς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη΄.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ΄.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ. λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς

ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ΄.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ. λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ΄.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ. δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας, μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κε΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστὶν.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκάτερᾳ, τὴν δὲ βασίν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛ΄.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ. λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. καὶ ἐπὲι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκαρέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσας πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη κατὰ τὸ Η. τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΔΓ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη΄.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ΄.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ. λέγω ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστιν ἴση· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λ΄.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστιν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα΄.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λβ΄.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν

προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ. καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λγ΄.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λδ΄.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον

πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ. λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ, καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δή, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση. καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λϛ΄.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ, ΑΘ. δὶα τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστὶν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, δὶα δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καί εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη΄.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν

ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, δὶα δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ δίαμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λθ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΒΓ. λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ᾽ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μ΄.

[Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.]

μα΄.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ. λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ΄.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μγ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστιν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ

ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματί ἐστιν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστιν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με΄.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ· καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ· καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ, ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μς´.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν.

Ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζ´.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον

ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾿ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστιν ἐπ᾿ εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη΄.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις. λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

GLOSSARIO

In un primo studio è conveniente, leggere rapidamente i *postulati* e le *nozioni comuni*, e poi subito la prima proposizione (p. 26), tralasciando le lunghe spiegazioni dei *termini geometrici*, poiché esse, pur avendo avuto ragione di essere per i greci, sono poco utili a noi, ai quali questi termini sono notissimi e fanno oramai parte della lingua comune.

Per facilitar l'uso di questo glossario, sono perciò state escluse le parole, appartenenti alla lingua comune dei greci, le quali compaiono soltanto nelle pp. 93-95.

Dei verbi sono date le varie forme adoperate nel testo, sotto la forma dell'infinito presente. Delle altre parole è data soltanto una delle forme adoperate.

ἄγειν condurre
    ἤχθω, ἤχθωσαν, ἦκται, ἀγαγεῖν
αἰτεῖν domandare
    ᾐτήσθω
αἰτήματα postulati
ἀδύνατον impossibile
ἀλλά ma
ἀλλήλους l'un l'altro
ἀναγράφειν costruire

ἀναγεγράφθω, ἀναγράψαι, ἀναγραφέν, ἀναγεγραμμὲνον
ἄνισος diseguale
ἄπειρος infinito
ἀπεναντίον opposto
ἀπό da
ἄρα dunque
ἀρχή principio
ἄτοπος assurdo
αὐτός stesso
ἀφαιρεῖν togliere
ἀφαιρεθῇ, ἀφῃρήσθω, ἀφῄρηται, ἀφελεῖν
βάσις base
γάρ poiché
γράφειν descrivere
γράφεσθαι, γεγράφθω
γραμμή linea
γωνία angolo
δέ poi, dunque
δεικνύναι dimostrare
δείξομεν, δεῖξαι, ἐδείχθη, ἐδείχθησαν, δειχθήσεται
δεῖν esser necessario
δεῖ, ἔδει
διά per
διάγειν condurre
διήχθω
διάμετρος diagonale, diametro
διάστημα distanza
διδόναι dare

δοθέν, δοθέντος, δοθέντι, δοθεῖσα, δοθείσης, δοθείσῃ, δοθεῖσαν, δοθεῖσαι, δοθεισῶν, δοθείσαις

διπλάσιος doppio

δίχα per metà

δυνατόν possibile

δύο due

ἐάν se

εἶ se

εἶναι essere

ἐστίν, εἰσίν, ἔστω, ἔστωσαν, ἔσται, ἔσονται, ὦσιν, ᾖ, ὄντα

εἰς verso

ἑκάτερος l’uno e l’altro

ἐκ da

ἐκτός fuori

ἐκβάλλειν prolungare

ἐκβεβλήσθω, ἐκβεβλήσθωσαν, ἐκβαλεῖν, ἐκβαλλομένας, ἐκβαλλομέναι

ἐκκεῖσθαι esser preso

ἐκκείσθω

ἐλάσσων minore

ἐμπίπτειν incontrare

ἐμπιπτέτω, ἐμπέπτωκεν, ἐνέπεσεν, ἐμπίπτουσα

ἐν in

ἐντός entro

ἐναλλάξ alternamente

ἔννοια nozione

ἐξ da

ἐπεί poiché

ἐπί su, per
ἐπιζευγνύναι congiungere
ἐπιζευγνύουσιν, ἐπεζεύχθω, ἐπεζεύχθωσαν, ἐπιζευγνύτωσαν, ἐπιζευγνύτωσαν, ἐπιζευχθεῖσα, ἐπιζευγνυμένων, ἐπιζευγνύουσαι
ἓτερος altro
εὐθεία retta
εὐθύγραμμον rettilineo
ἐφαρμόζειν coincidere
ἐφαρμόζοντα, ἐφαρμοζομένες, ἐφαρμοζομένου, ἐφαρμόσει, ἐφαρμοσάσης, ἐφαρμόσαντος, ἐφαρμόσουσιν
ἐφεξῆς di seguito
ἐφιστὰναι erigere
ἐφέστηκεν, ἐφεστηκυῖα
ἔχειν avere
ἔχει, ἔχουσιν, ἐχέτω, ἔχῃ, ἐχον, ἔχοντα, ἔχουσαν, ἔχουσαι, ἕξει
ἤ che
ἥμισυ metà
ἤτοι ovvero
ἶσος eguale
ἰσόπλευρον equilatero
ἰσοσκελές isoscele
κάθετος cateto
καί e
καλεῖν chiamare
καλεῖται
κατά per, ad

καταλειπόμενον rimanente
κεῖσθαι esser posto
κείσθω, κείμεναι
κέντρον centro
κοινή comune
κορυφή vertice
κύκλος circolo
λαμβάνειν prendere
εἰλήφθω
λέγειν dire
λέγω, λέγόμενα
λείπειν lasciare
λοιπός resto
μείζων maggiore
μέν pure, bensí
μέρος parte
μετά con
μεταλαμβὰνειν permutare
μεταλαμβανόμεναι, μεταλαμβανομὲνας
μή non
μηδέτερος nessun dei due
μία una
νῦν ora
ὁ il
ὃλος intero
ὁμοίως similmente
ὀξύς acuto
ὅπερ ciò che
ὁπότερος qual dei due

ὀρθογώνιος ortogonale, rettangolare
ὀρθός retto
ὅταν quando
ὅτι che
ὅς il quale, che
οὐδέ né
οὐθέν niente
οὐ(κ) non
οὖν dunque
πάλιν di nuovo
πᾶς tutto
παρά ad
παραβάλλειν applicare παραβάλλειν
παραβεβλήσθω, παραβέβληται, παραβαλεῖν
παραλληλόγραμμον parallelogrammo
παράλληλος parallelo
παραπλήρωμα complemento
πεπερασμένη terminata
περί intorno
περιέχειν comprendere
περιέχουσιν, περιέξουσιν, περιεχουσῶν, περιεχομένη, περιεχομένην
πλευρά lato
πλήν eccetto
πολύς molto
ποιεῖν fare
ποιεῖ, ποιοῦσιν, ποιῇ, ποιῶσιν, ποιείτω, ποιείτωσαν, ποιῆσαι, ποιήσει, πεποίηκεν
πρός verso

προσεκβάλλειν prolungare
προσεκβεβλήσθω, προσεκβεβλήσθωσαν, προσεκβληθείσες, προσεκβληθεισῶν
προσκεῖσθαι essere aggiunto
προσκείσθω
προστιθέναι aggiungere
προστεθῇ
σημεῖον punto
σταθεῖσα eretta
συμπίπτειν concorrere
συμπίπτουσιν, συμπίπτουσαι, συμπεσοῦνται, συμπιπτέτωσαν
συνιστάναι costruire
συνεστάτω, συνέσταται, συνεστάτωσαν, συνίστανται, συστήσασθαι, συσταθῶσιν, συσταθὴσονται, συσταθεῖσαι
συνεχές continuo
σχῆμα figura
τέμνειν dividere
τέμνει, τέμνουσιν, τέμνωσιν, τετμήσθω, τετμηται, τεμεῖν, τετμημένες
τέσσαρες quattro
τετράγωνον quadrato
τιθέναι porre
θέσθαι, τιθεμένου
τίς alcuno
τραπέζιον trapezio
τρεῖς tre
τρίγωνον triangolo

τυχόν a caso
ὑπερέχειν superare
ὑπό da
ὑποκεῖσθαι supporre
ὑπόκειται
ὑποτείνειν sottendere
ὑποτείνει, ὑποτείνουσιν, ὑποτείνουσα, ὑποτείνούσης, ὑποτείνουσαν, ὑποτείνουσαι
χωρίον spazio
ὡς come
ὥστε sicché